$\boxed{\text{演習５}}$ $\vec{a}=(5、-3)、\vec{b}=(3、4)$がある。

(1) 等式 $3\vec{a}+\vec{x}=2\vec{b}$を満たす$\vec{x}$を成分表示せよ。

条件より、$\vec{x}=2\vec{b}-3\vec{a}=(6、8)-(15、-9)=(-9、17)$

(2) $\begin{cases} 3\vec{x}+2\vec{y}=\vec{a}+\vec{b} & \cdots① \\ \vec{x}-\vec{y}=\vec{a}+\vec{b} & \cdots② \end{cases}$ を満たす$\vec{x}$、$\vec{y}$を成分表示せよ。

①＋②×2 より、$5\vec{x}=3(\vec{a}+\vec{b})$ （※）

$\therefore\ \vec{x}=\frac{3}{5}(\vec{a}+\vec{b})=\frac{3}{5}(8、1)=\left(\frac{24}{5}、\frac{3}{5}\right)$

（※）

$3\vec{x}+2\vec{y}=\vec{a}+\vec{b}\ \cdots①$

$2\vec{x}-2\vec{y}=2\vec{a}+2\vec{b}\ \cdots②\times2$

両辺を加えて、$5\vec{x}=3(\vec{a}+\vec{b})$

①－②×3 より、$5\vec{y}=-2(\vec{a}+\vec{b})$

$\therefore\ \vec{y}=-\frac{2}{5}(\vec{a}+\vec{b})=-\frac{2}{5}(8、1)=\left(\frac{-16}{5}、\frac{-2}{5}\right)$

$\boxed{\text{演習６}}$ $\vec{a}=(4,\ -3),\ \vec{b}=(-1,\ 2),\ \vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}$ のとき，$|\vec{c}|$を求め、$|\vec{c}|$が最小になるときの実数tの値を求めよ。

$\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}=(4,\ -3)+t(-1,\ 2)=(4-t、-3+2t)$

$|\vec{c}|=\sqrt{(4-t)^2+(-3+2t)^2}=\sqrt{16-8t+t^2+9-12t+4t^2}=\sqrt{5t^2-20t+25}$

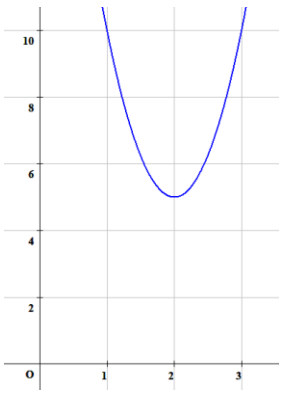
ここで、$y=5t^2-20t+25$ とおくと、yはtの２次関数より、

$y=5t^2-20t+25=5(t^2-4t)+25$

$=5\{(t-2)^2-4\}+25=5(t-2)^2+5$

従って、yはt＝2 のとき最小になる

よって、$|\vec{c}|$はt＝2 のとき最小になる。

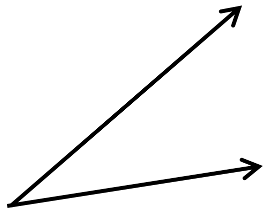


（参考）

yの最小値は、y＝5 なので、$|\vec{c}|$の最小値は、$|\vec{c}|=\sqrt{5}$である。

4　ベクトルの内積

$\boxed{\text{A}}$ ベクトルの内積



零ベクトルでない 2 つのベクトルを，$\vec{a}$、$\vec{b}$とする。

1 点 O を定めて，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ としたとき，

半直線 OA，OB のなす角のうち，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$であるものを

2 つのベクトル$\vec{a}$、$\vec{b}$，のなす角

という。$\vec{a}$、$\vec{b}$，のなす角が θ のとき、$\vec{a}$、$\vec{b}$の内積を記号$\vec{a}\cdot\vec{b}$で表し、次の式で定義する。

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\ |\vec{a}||\vec{b}|cos\theta$$

とくに，$\vec{a}=\vec{0}$ または $\vec{b}=\vec{0}$ のときは，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$　と定める。

※ 内積$\vec{a}$ ・$\vec{b}$の結果は，ベクトルではなく実数である。

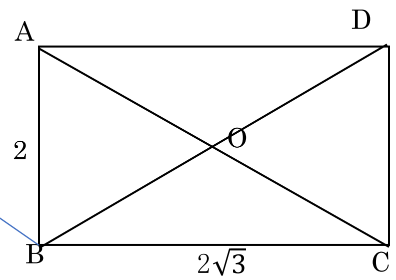
＜例22＞　θ を$\vec{a}$、$\vec{b}$のなす角とするとき、内積$\vec{a}\cdot\vec{b}$を求めよ。

(1)　$|\vec{a}|=3$、$|\vec{b}|=2$、$\theta=30^\circ$ のとき、$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\times2\times\cos30^\circ\ =3\sqrt{3}$

(2)　$|\vec{a}|=1$、$|\vec{b}|=2$、$\theta=120^\circ$ のとき、$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times2\times\cos120^\circ\ =-1$

＜例 23＞　AB＝2、BC＝$2\sqrt{3}$である長方形ABCDにおいて、AC とBDの交点をOとする。次の内積の値を求めよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=2\times2\sqrt{3}\times\cos60^\circ\ =6$



(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=2\times2\times\cos120^\circ\ =-2$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}=2\sqrt{3}\times4\times\cos150^\circ\ =-12$

(4)　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=2\times2\sqrt{3}\times\cos30^\circ\ =6$

(5)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DA}}=2\times2\sqrt{3}\times\cos90^\circ\ =0$