

**B** 成分による内積の表示

ベクトルの内積は、その成分を用いて次のように表される。

$$\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2) \text{ のとき、 } \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

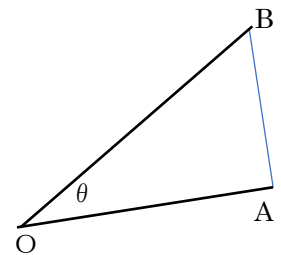
(証明)

右図  $\triangle OAB$  で余弦定理を適用すると、

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cos \theta \quad \dots \textcircled{1}$$

が成立する。

$\triangle OAB$  において、 $\vec{a} = \vec{OA}$ ,  $\vec{b} = \vec{OB}$  として、



①を  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  で表してみよう。

$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \vec{b} - \vec{a}$  であるから、①は、

$$|\vec{AB}|^2 = |\vec{OA}|^2 + |\vec{OB}|^2 - 2 \times |\vec{OA}| \times |\vec{OB}| \times \cos \theta$$

$$\therefore |\vec{b} - \vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \times |\vec{a}| \times |\vec{b}| \times \cos \theta$$

$$\therefore |\vec{b} - \vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \times \vec{a} \cdot \vec{b}$$

ここで、 $\vec{a} = (a_1, a_2)$ ,  $\vec{b} = (b_1, b_2)$  とすると、

$\vec{b} - \vec{a} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$  であるから、

$$(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 = (a_1^2 + a_2^2) + (b_1^2 + b_2^2) - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$$

展開して整理すると、

$$-2a_1 b_1 - 2a_2 b_2 = -2\vec{a} \cdot \vec{b}$$

従って、

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

$\vec{a} = (a_1, a_2)$  のとき、  
 $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$  より、  
 $|\vec{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2$

<例25> 次のベクトルの内積を求めよ。

(1)  $\vec{a}=(1, 2), \vec{b}=(3, 1)$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times 3 + 2 \times 1 = 5$$

(2)  $\vec{a}=(-2, 1), \vec{b}=(-3, -4)$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (-2) \times (-3) + 1 \times (-4) = 6 - 4 = 2$$

(3)  $\vec{a}=(\sqrt{3}, 1), \vec{b}=(\sqrt{3}, 3)$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{3} \times \sqrt{3} + 1 \times 3 = 3 + 3 = 6$$

<例26>  $A(-1, 1), B(1+2\sqrt{3}, 3-2\sqrt{3}), C(1, 3)$ のとき、次の内積を求めよ。

(1)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AB} = (2+2\sqrt{3}, 2-2\sqrt{3})$$

$$\overrightarrow{AC} = (2, 2)$$

$$\text{より、}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times (2+2\sqrt{3}) + 2 \times (2-2\sqrt{3})$$

$$= 4 + 4\sqrt{3} + 4 - 4\sqrt{3} = 8$$

(2)  $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA}$

$$\overrightarrow{BC} = (-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$$

$$\overrightarrow{CA} = (-2, -2)$$

$$\text{より、}\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = (-2) \times (-2\sqrt{3}) + (-2) \times 2\sqrt{3}$$

$$= 4\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = 0$$