$\boxed{\mathrm{C}}$ ベクトルのなす角

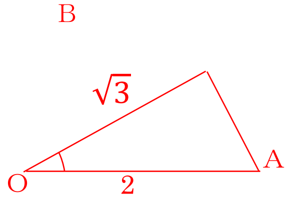
$\vec{0}$でない 2 つのベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$のなす角を θ とすると，$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta}$

より，なす角 θ について，次の式が成り立つ。ただし、$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$とする。

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\times\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$$

ただし、　　$0°\leqq\theta\leqq180°$　　である。

＜例 27＞△OAB で，OA＝2，OB＝$\sqrt{3}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=3$ であるとき，∠AOB を求めよ。



$$\cos\angle\mathrm{AOB}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}=\frac{3}{2\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$0°\leqq\angle\mathrm{AOB}\leqq180°$ より、$\angle\mathrm{AOB}=30°$

＜例28＞　次のベクトルのなす角 θ を求めよ。

(1)　$\vec{a}=(-1,\ 2)$，$\vec{b}=(1,\ 3)$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=(-1)\times1+2\times3=-1+6=5$

$|\vec{a}|=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$

$|\vec{b}|=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$

より，$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{5}{\sqrt{5}\times\sqrt{10}}=\dfrac{5}{5\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ より、$\theta=45°$

(2)　$\vec{a}=(2,\ 0)$，$\vec{b}=(-\sqrt{3},\ 1)$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times(-\sqrt{3})+0\times1=-2\sqrt{3}$

$|\vec{a}|=\sqrt{2^2+0^2}=2$、$|\vec{b}|=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2}=2$

より，$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{-2\sqrt{3}}{2\times2}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$、$0°\leqq\theta\leqq180°$ より、$\theta=150°$

(3) $\vec{a}=(1,\ 2),\ \vec{b}=(-2,\ 1)$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times(-2)+2\times1=-2+2=0$

$|\vec{a}|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$、$|\vec{b}|=\sqrt{(-2)^2+1^2}=\sqrt{5}$

より，$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{0}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=0$、$0°\leqq\theta\leqq180°$ より、$\theta=90°$

$\vec{0}$でない 2 つのベクトル$\vec{a}$, $\vec{b}$のなす角が 90° のとき、$\vec{a}$, $\vec{b}$は垂直といい、$\vec{a}\perp\vec{b}$とかく。

このとき、$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos90°=|\vec{a}|\times|\vec{b}|\times0=0$

逆に、$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ のとき、$|\vec{a}|\neq0$、$|\vec{b}|\neq0$より、$\cos\theta=0$ ∴ $\theta=90°$

従って、次のことが成り立つ。

$\vec{0}$でない 2 つのベクトル$\vec{a}=(a_1、a_2)$, $\vec{b}=(b_1、b_2)$のとき、

$\vec{a}\perp\vec{b}$	$\Leftrightarrow$	$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$	垂直条件

＜例 29＞ $\vec{a}=(a、b)$のとき、$\vec{b}=(-b、a)$、$\vec{c}=(b、-a)$は垂直であることを示せ。

$\vec{a}\cdot\vec{b}=a\times(-b)+b\times a=-ab+ab=0$ 従って、$\vec{a}\perp\vec{b}$

$\vec{a}\cdot\vec{c}=a\times b+b\times(-a)=ab-ab=0$ 従って、$\vec{a}\perp\vec{b}$

＜例 30＞ 次の2つのベクトルが垂直になるとき、x の値を定めよ。

(1) $\vec{a}=(2、3)$、$\vec{b}=(-3、x)$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times(-3)+3\times x=-6+3x=0$ 従って、$x=2$

(2) $\vec{a}=(2、-3)$、$\vec{b}=(x、6)$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times x+(-3)\times6=2x-18=0$ 従って、$x=9$

(3) $\vec{a}=(x、-1)$、$\vec{b}=(x、x+2)$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=x\times x+(-1)\times(x+2)=x^2-x-2=(x-2)(x+1)=0$ 従って、$x=2、-1$