$\boxed{\text{演習 7}}$ $\vec{a}$＝(3，－1)に垂直な大きさが 10 のベクトルを求めよ。

求めるベクトルを、$\vec{v}$＝(x、y)とおく。

1)　$\vec{a}\perp\vec{v}$であるから、$\vec{a}\cdot\vec{v}=3x-y=0$　・・・　①

$\boxed{\vec{a}\perp\vec{v} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{v}=0}$

2)　$\vec{v}$はの大きさが 10 であるから，

$|\vec{v}|=\sqrt{x^2+y^2}=10$　∴　$x^2+y^2=100$　・・・　②

①より、y＝3x、これを②へ代入して

$x^2+9x^2=100$

$x^2=10$　∴　$x=\pm\sqrt{10}$

$x=\sqrt{10}$のとき、$y=3\sqrt{10}$より、$\vec{v}=(\sqrt{10}, 3\sqrt{10})$

$x=-\sqrt{10}$のとき、$y=-3\sqrt{10}$より、$\vec{v}=(-\sqrt{10}, -3\sqrt{10})$

$\boxed{\text{C}}$ 内積の性質

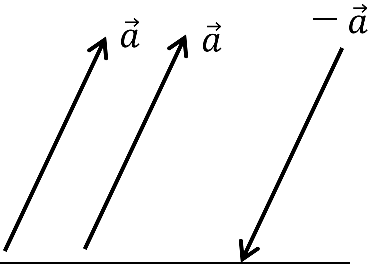
ベクトルの内積に関して、次の式が成り立つ。ただし、Ⅲのkは実数とする。

I.　$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$

II.　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

III.　$(k\vec{a})\cdot\vec{b}=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$

IV.　$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$



（証明）

Ⅰ.　$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}||\vec{a}|\cos 0^\circ=|\vec{a}||\vec{a}|=|\vec{a}|^2$

Ⅱ.　$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

$\vec{b}\cdot\vec{a}=|\vec{b}||\vec{a}|\cos\theta=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=\vec{a}\cdot\vec{b}$

$\vec{a}$と$\vec{a}$　のなす角は 0°　より、

$\cos 0^\circ=1$

$\vec{a}\cdot(-\vec{a})=|\vec{a}||-\vec{a}|\cos 180^\circ$

$=|\vec{a}||\vec{a}|(-1)=-|\vec{a}|^2$

Ⅲ. $\vec{a}=(a_1, a_2)$, $\vec{b}=(b_1, b_2)$とおく。このとき,

$k\vec{a}=k(a_1, a_2)=(ka_1, ka_2)$ より、

左辺$=(k\vec{a})\cdot\vec{b}=ka_1\times b_1+ka_2\times b_2=k(a_1b_1+a_2b_2)$

右辺$=k(\vec{a}\cdot\vec{b})=k(a_1b_1+a_2b_2)$ より、$(k\vec{a})\cdot\vec{b}=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$

Ⅳ. $\vec{a}=(a_1, a_2)$, $\vec{b}=(b_1, b_2)$, $\vec{c}=(c_1, c_2)$とおく。このとき,

$\vec{a}+\vec{b}=(a_1, a_2)+(b_1, b_2)=(a_1+b_1, a_2+b_2)$

より,

左辺$=(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=(a_1+b_1)\times c_1+(a_2+b_2)\times c_2$

$=a_1c_1+b_1c_1+a_2c_2+b_2c_2$

$=(a_1c_1+a_2c_2)+(b_1c_1+b_2c_2)$

左辺$=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}=(a_1c_1+a_2c_2)+(b_1c_1+b_2c_2)$

従って、$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

※ Ⅰ. より、$\vec{a}\cdot\vec{a}\geqq 0$ $(|\vec{a}|^2\geqq 0)$

<例 31>次の計算をせよ。

(1) $(\vec{a}-2\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}-2\vec{b}\cdot\vec{c}$

(2) $(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{b}$

$=|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{b}-|\vec{b}|^2$

$=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2$

(3) $(2\vec{a}-\vec{b})\cdot(3\vec{a}+2\vec{b})=6\vec{a}\cdot\vec{a}+4\vec{a}\cdot\vec{b}-3\vec{b}\cdot\vec{a}-2\vec{b}\cdot\vec{b}$

$=6|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}-2|\vec{b}|^2$