

<例 31> (続き)

$$(4) \quad |\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$= \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b}$$

$$= |\vec{a}|^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$$

$$= |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$$

$$(5) \quad |2\vec{a} - 3\vec{b}|^2 = (2\vec{a} - 3\vec{b}) \cdot (2\vec{a} - 3\vec{b})$$

$$(2a - 3b)^2 = 4a^2 - 12ab + 9b^2$$

$$= 4\vec{a} \cdot \vec{a} - 6\vec{a} \cdot \vec{b} - 6\vec{b} \cdot \vec{a} + 9\vec{b} \cdot \vec{b}$$

$$= 4|\vec{a}|^2 - 6\vec{a} \cdot \vec{b} - 6\vec{a} \cdot \vec{b} + 9|\vec{b}|^2$$

$$= 4|\vec{a}|^2 - 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 9|\vec{b}|^2$$

<例 32> $|\vec{a}|=1$ 、 $|\vec{b}|=4$ 、 $\vec{a} \cdot \vec{b}=2$ のとき、 $|\vec{a} - 2\vec{b}|^2$ と $|\vec{a} - 2\vec{b}|$ の値を求めよ。

$$|\vec{a} - 2\vec{b}|^2 = (\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b})$$

$$= \vec{a} \cdot \vec{a} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} - 2\vec{b} \cdot \vec{a} + 4\vec{b} \cdot \vec{b}$$

$$= |\vec{a}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2$$

$$= 1^2 - 4 \times 2 + 4 \times 4^2$$

$$= 57$$

$$|\vec{a} - 2\vec{b}| = \pm\sqrt{57}$$

ここで、 $|\vec{a} - 2\vec{b}| > 0$ より、 $|\vec{a} - 2\vec{b}| = \sqrt{57}$

演習 8 $|\vec{a}|=2$ 、 $|\vec{b}|=3$ 、 $|\vec{a} + \vec{b}|=\sqrt{19}$ のとき、次の問いに答えよ。

(1) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ の値を求めよ。

(2) \vec{a} と \vec{b} のなす角 θ を求めよ。

(3) $|\vec{a} - 2\vec{b}|$ を求めよ。

(1)

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 4 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 9 = 13 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 19$$

より、 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$

(2)

$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{3}{2 \times 3} = \frac{1}{2}$$

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ より、 $\theta = 60^\circ$

(3)

$$|\vec{a} - 2\vec{b}|^2 = (\text{途中略}) = |\vec{a}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2 = 4 - 12 + 36 = 28$$

$$|\vec{a} - 2\vec{b}| = \pm 2\sqrt{7}$$

ここで、 $|\vec{a} - 2\vec{b}| > 0$ より、 $|\vec{a} - 2\vec{b}| = 2\sqrt{7}$