研究　三角形の面積

△OABにおいて、$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$、$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とするとき、△OABの面積Sは、

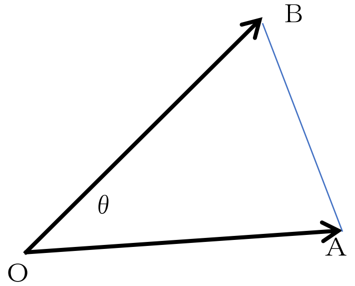
$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}\quad\cdots(A)$$

特に、$\vec{a}=(a_1、a_2)$、$\vec{b}=(b_1、b_2)$のときは、

$$S=\frac{1}{2}|a_1b_2-a_2b_1|\quad\cdots(B)$$

（証明）

∠AOB＝θ、0°＜θ＜180° とする。



△OABの面積Sは、

$$S=\frac{1}{2}\cdot OA\cdot OB\cdot\sin\theta=\boxed{\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta}\quad\cdots①$$

ここで、$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より、$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$

$$\therefore\ \sin\theta=\pm\sqrt{1-\cos^2\theta}$$

0°＜θ＜180° より、$\sin\theta>0$　よって、$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}\quad\cdots②$

したがって、②を①に代入して、

$$S=\boxed{\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta}=\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sqrt{1-\cos^2\theta}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-\underline{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\cos^2\theta}}$$

A＞0 のとき、$A\sqrt{B}=\sqrt{A^2B}$

ここで、$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ より、$(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\cos^2\theta$であるから、

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-\underline{(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}}$$

また、$\vec{a}=(a_1、a_2)$、$\vec{b}=(b_1、b_2)$のとき、

$|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_1^2}$　　より、　$|\vec{a}|^2=a_1^2+a_1^2$

$|\vec{b}|=\sqrt{b_1^2+b_1^2}$　　より、　$|\vec{b}|^2=b_1^2+b_1^2$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$

より、(A)の根号内の計算を行うと、

$$|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=(a_1{}^2+a_2{}^2)(b_1{}^2+b_2{}^2)-(a_1b_1+a_2b_2)^2$$
$$=a_1{}^2b_1{}^2+a_1{}^2b_2{}^2+a_2{}^2b_1{}^2+a_2{}^2b_2{}^2-(a_1{}^2b_1{}^2+2a_1b_1a_2b_2+a_2{}^2b_2{}^2)$$
$$=a_1{}^2b_2{}^2-2a_1b_1a_2b_2+a_2{}^2b_1{}^2$$
$$=(a_1b_2-a_2b_1)^2$$

したがって、

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{(a_1b_2-a_2b_1)^2}=\frac{1}{2}|a_1b_2-a_2b_1|$$

※　$\sqrt{A^2}=|A|$

練習 1　$|\overrightarrow{OA}|=4$、$|\overrightarrow{OB}|=5$、$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-10$ の△OAB の面積Sを求めよ。

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{4^2\times5^2-(-10)^2}=5\sqrt{3}$$

練習 2　3 点 O(0、0)、A(4、1)、B(2、−1)を頂点とする三角形の面積Sを求めよ。

$\overrightarrow{OA}=(\ 4\ 、1\ )$、$\overrightarrow{OB}=(\ 2\ 、-1\ )$

より、

$$S=\frac{1}{2}|4\times(-1)-1\times2|=3$$