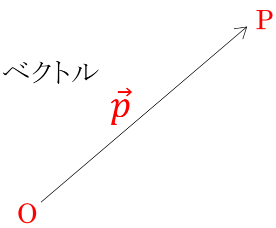
第２節　ベクトルと平面図形

5　位置ベクトル

A　位置ベクトル



平面上で，1 点 O を固定して考えると，任意の点 P の位置は，ベクトル

$$\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}\ \cdots\cdots\ ①$$

によって定められる。

このとき，$\vec{p}$を点 O に関する点Pの**位置ベクトル**という。

このとき点P，ベクトル$\vec{p}$ は 1 対 1 に対応しているので、次のようにかく

$$\mathrm{P}(\vec{p})$$

<例 33>　2 点$\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$のとき，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{b}-\vec{a}$

※終点の位置ベクトルから始点の位置ベクトルを引けばよい

B　内分点・外分点の位置ベクトル

2 点$\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$のとき，線分ABを m：n の比に内分する点 P の位置ベクトル$\vec{p}$ は

$$\vec{p}=\frac{m\vec{b}+n\vec{a}}{m+n}$$

（証明）

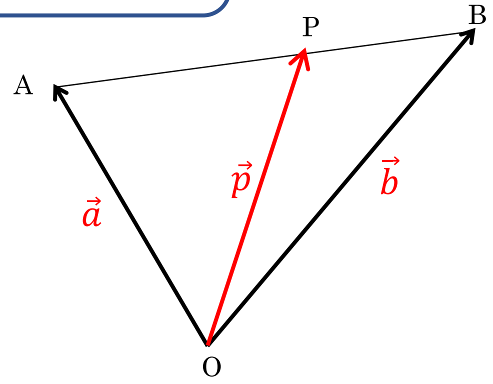
$$\vec{p}=\vec{a}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}$$

$$=\vec{a}+\boxed{\frac{m}{m+n}}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

$$=\vec{a}+\frac{m}{m+n}(\vec{b}-\vec{a})$$

$$=\frac{(m+n)\vec{a}+m(\vec{b}-\vec{a})}{m+n}$$

$$=\frac{m\vec{a}+n\vec{a}+m\vec{b}-m\vec{a}}{m+n}=\frac{m\vec{b}+n\vec{a}}{m+n}$$



※ AB の中点 M の位置ベクトル$\vec{m}$は、 $\vec{m}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$

※ 線分ABを, m : n の比に外分する点Qの位置ベクトル$\vec{q}$ は

$$\vec{q}=\frac{m\vec{b}-n\vec{a}}{m-n}$$

※ 内分公式において、＋を－に置き換えればよい。

<例 34> 2 点A($\vec{a}$), B($\vec{b}$)のとき, 線分ABを次の比に分ける点の位置ベクトルを求めよ。

(1) 2:1 の比に内分する点C

ABを 2:1 に内分するので、$\vec{p}=\dfrac{2\vec{b}+\vec{a}}{2+1}=\dfrac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}$

(2) 1:3 の比に内分する点D

ABを 1:3 に内分するので、$\vec{p}=\dfrac{\vec{b}+3\vec{a}}{1+3}=\dfrac{3\vec{a}+\vec{b}}{4}$

(3) 2:3 の比に外分する点E

ABを 2:3 に外分するので、$\vec{p}=\dfrac{2\vec{b}-3\vec{a}}{2-3}=\dfrac{2\vec{b}-3\vec{a}}{-1}=3\vec{a}-2\vec{b}$

(4) 3:1 の比に外分する点F

ABを 3:1 に外分するので、$\vec{p}=\dfrac{3\vec{b}-\vec{a}}{3-1}=\dfrac{3\vec{b}-\vec{a}}{2}$

＜例 35＞2 点A($\vec{a}$), B($\vec{b}$)のとき, 線分ABを t:(1－t)の比に内分する点Pの位置ベクトル$\vec{p}$を求めよ。

$$\vec{p}=\frac{t\vec{b}+(1-t)\vec{a}}{t+(1-t)}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$$