C　三角形の重心の位置ベクトル

＜例 36＞　3点A($\vec{a}$), B($\vec{b}$), C($\vec{c}$)がある。次の問に答えよ。

(1)　線分BCの中点がM($\vec{m}$)のとき$\vec{m}$を, $\vec{b}$、$\vec{c}$で表せ。

$$\vec{m}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$$

(2)　△ABCの重心Gの位置ベクトル$\vec{g}$　は

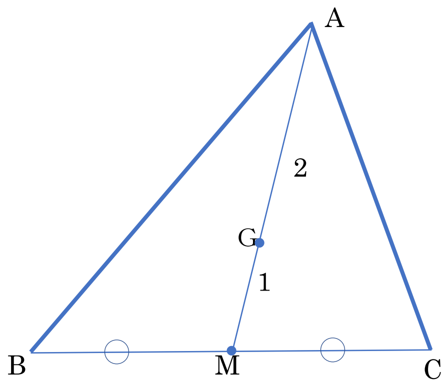
$$\vec{g}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

であることを証明せよ。

（証明）

重心 G は、AM を 2:1 に内分する点なので、

$$\vec{g}=\frac{2\vec{m}+\vec{a}}{2+1}=\frac{2\left(\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\right)+\vec{a}}{3}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$



(3)　平面上の任意の点Pに対して, $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CP}=3\overrightarrow{GP}$であることを示せ。

P($\vec{p}$)として、位置ベクトルで表すと、

（左辺）$=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CP}=(\vec{p}-\vec{a})+(\vec{p}-\vec{b})+(\vec{p}-\vec{c})=3\vec{p}-\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$

（右辺）$=3\overrightarrow{GP}=3(\vec{p}-\vec{g})=3\vec{p}-3\vec{g}=3\vec{p}-3\times\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}=3\vec{p}-\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$

したがって、$\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CP}=3\overrightarrow{GP}$

6　ベクトルの図形への応用

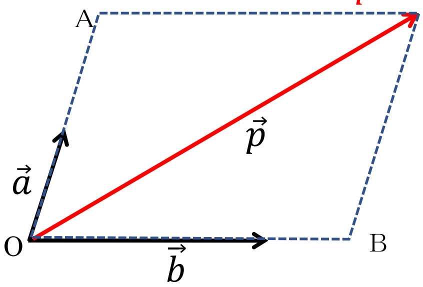
A 位置ベクトルの利用

$\vec{0}$でない 2 つのベクトル$\vec{a}$, $\vec{b}$が平行でないとき，任意のベクトル$\vec{p}$は

$$\vec{p}=\mathrm{h}\vec{a}+\mathrm{k}\vec{b}\quad (\mathrm{h},\ \mathrm{k}\ は実数)$$

の形に**一意的**に表すことができる。

$\vec{a}$, $\vec{b}$の始点を O とし、任意のベクトル$\vec{p}$の始点を O にする。

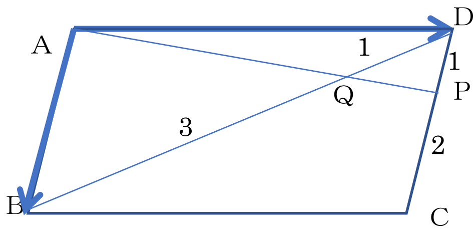


$\vec{p}$が対角線となるように平行四辺形OACB（上図）を作ると、$\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

ここで、$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\mathrm{h}\vec{a}$、$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\mathrm{k}\vec{b}$（h, k は実数）とかけるので、　$\vec{p}=\mathrm{h}\vec{a}+\mathrm{k}\vec{b}$

※　$\vec{a}\neq\vec{0}$、$\vec{b}\neq\vec{0}$で、$\vec{a}$, $\vec{b}$が平行でないとき、$\vec{a}$, $\vec{b}$は **1 次独立**であるという。

＜例 37＞　平行四辺形 ABCD において，辺 CD を 2:1 に内分する点を P，対角線 BD を 3:1 に内分する点を Q とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$とおくと，$\vec{b}$, $\vec{d}$は 1 次独立である。



(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$を$\vec{b}$, $\vec{d}$で表せ。

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{DP}}=\vec{d}+\frac{1}{3}\vec{b}$$

※内分公式を用いると、

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{2\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{2+1}=\frac{2\vec{d}+(\vec{b}+\vec{d})}{3}=\frac{\vec{b}+3\vec{d}}{3}=\frac{1}{3}\vec{b}+\vec{d}$$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$を$\vec{b}$, $\vec{d}$で表せ。

内分公式より、$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\dfrac{3\vec{d}+\vec{b}}{3+1}=\dfrac{3\vec{d}+\vec{b}}{4}=\dfrac{1}{4}\vec{b}+\dfrac{3}{4}\vec{d}$