B 直線上の点

＜例 37＞において、

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{1}{3}\vec{b}+\vec{d}=\frac{\vec{b}+3\vec{d}}{3}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{3}{4}\vec{d}=\frac{\vec{b}+3\vec{d}}{4}$$

より、$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\boxed{\frac{3}{4}}\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ $\cdots$ ①

①より、$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}//\overrightarrow{\mathrm{AP}}$であり、

点Aを共有しているので、3 点A、P、Q は一直線上にある。

一般に、次のことが成り立つ。

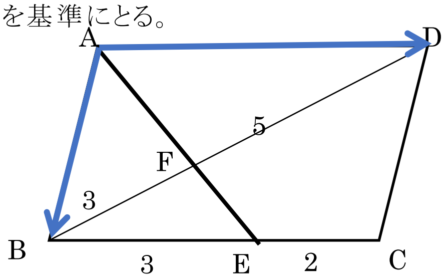
2 点A、Bが異なるとき、

点Cが、直線AB上にある　$\Leftrightarrow$　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$　となる実数kがある。

(3 点A、B、Cが一直線上にある)

＜例 38＞平行四辺形ABCD において、辺 BC を 3:2 に内分する点をE、対角線 BD を 3:5 に内分する点をFとする。このとき、3 点 A、F、E は一直線上にあることを示せ。また、AF:FE を求めよ。

ヒント 始点がAの位置ベクトルで考え、$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$と$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$を基準にとる。



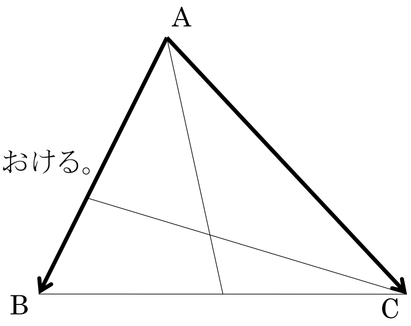
$$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\frac{3\overrightarrow{\mathrm{AD}}+5\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{3+5}=\frac{5\overrightarrow{\mathrm{AB}}+3\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{8}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{5\overrightarrow{\mathrm{AB}}+3\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{5}$$

従って、$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\frac{5}{8}\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ となり、3 点 A、F、E は一直線上にある。

これより、AF:AE＝5:3 であることが分かる。

＜例 39＞△ABC において，辺 AB を 2:1 に内分する点を D，辺 BC の中点を M とし，線分 AM と CD の交点を E とする。$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$として，次の問に答えよ。



(1)　$\overrightarrow{AM}$を$\vec{b}$、$\vec{c}$で表せ。

M は、BC の中点より、$\overrightarrow{AM}=\boxed{\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}}$

(2)　3 点 A、E、M は 1 直線上にあることより、$\overrightarrow{AE}=s\overrightarrow{AM}$とおける。

このとき、$\overrightarrow{AE}$を s、$\vec{b}$、$\vec{c}$で表せ。

$$\overrightarrow{AE}=s\overrightarrow{AM}=s\times\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}=\frac{s}{2}\vec{b}+\frac{s}{2}\vec{c}\quad\cdots\ ①$$

(3)　CE:ED＝t:(1－t)とおくとき，$\overrightarrow{AE}$を t，$\vec{b}$、$\vec{c}$で表せ。

内分公式より、$\overrightarrow{AE}=\dfrac{t\overrightarrow{AD}+(1-t)\overrightarrow{AC}}{t+(1-t)}=\dfrac{2t}{3}\vec{b}+(1-t)\vec{c}\quad\cdots\ ②$

(4)　$\overrightarrow{AE}$を$\vec{b}$、$\vec{c}$で表せ。

$\vec{b}\neq\vec{0}$、$\vec{c}\neq\vec{0}$で、$\vec{b}$と$\vec{c}$は平行でないから、$\overrightarrow{AE}$の$\vec{b}$、$\vec{c}$を用いた表し方はただ 1 通りである。

(2)、(3) の$\overrightarrow{AE}$を比較する。

$\vec{b}$の係数を比較して、$\dfrac{s}{2}=\dfrac{2t}{3}$　∴　$3s=4t$

$\vec{c}$の係数を比較して、$\dfrac{s}{2}=1-t$　∴　$s=2-2t$

これを解いて、

$s=\dfrac{4}{5}$　、$t=\dfrac{3}{5}$

従って、

$$\overrightarrow{AE}=\boxed{\frac{2}{5}}\vec{b}+\boxed{\frac{2}{5}}\vec{c}$$