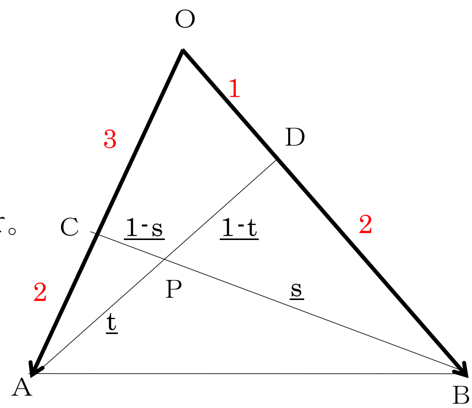
$\boxed{\text{演習 9}}$ △OAB において，辺OAを 3:2 に内分する点をC，辺OBを 1:2 に内分する点をDとし，線分 ADとBCの交点をPとする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$として，次の問に答えよ。



(1) BP : PC＝s : (1－s)とおくとき、$\overrightarrow{OP}$を s、$\vec{a}$、$\vec{b}$で表せ。

$$\overrightarrow{OP}=\frac{s\overrightarrow{OC}+(1-s)\overrightarrow{OB}}{s+(1-s)}=\frac{3s}{5}\vec{a}+(1-s)\vec{b}\quad\cdots①$$

※ 点 P は、線分 BC を s:(1－s)に内分する点。

(2) AP : PD＝t : (1－t)とおくとき，$\overrightarrow{OP}$を t、$\vec{a}$、$\vec{b}$で表せ。

$$\overrightarrow{OP}=\frac{t\overrightarrow{OD}+(1-t)\overrightarrow{OA}}{t+(1-t)}=\frac{t}{3}\vec{b}+(1-t)\vec{a}\quad\cdots②$$

※ 点 P は、線分 AD を t:(1－t)に内分する点。

$$\boxed{\overrightarrow{OC}=\frac{3}{5}\vec{a}、\quad \overrightarrow{OD}=\frac{1}{3}\vec{b}}$$

(3) $\overrightarrow{OP}$を$\vec{a}$、$\vec{b}$で表せ。

$\vec{a}$、$\vec{b}$は、1 次独立より、①、②を比較して、

$$\begin{cases}\dfrac{3s}{5}=1-t & \therefore\ 3s=5-5t\\[2mm] 1-s=\dfrac{t}{3} & \therefore\ 3-3s=t\end{cases}$$

これを解いて、$s=\dfrac{5}{6}$　、$t=\dfrac{1}{2}$

従って、$\overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{6}\vec{b}$

(4) 直線 OP の延長上と辺 AB との交点を Q とするとき、AQ : QB、OP:PQ を求めよ。

$$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}=\frac{3\vec{a}+\vec{b}}{6}=\frac{4}{6}\times\frac{3\vec{a}+\vec{b}}{4}$$

より、$\overrightarrow{OP}$は、AB を 1:3 に内分する位置ベクトルを$\dfrac{4}{6}$倍、すなわち、$\dfrac{2}{3}$倍したベクトル。

従って、AQ : QB＝1 : 3、OP : PQ＝2 : 1

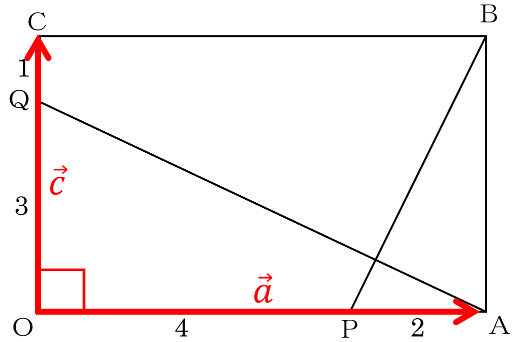
C 内積の利用

ベクトルの内積を利用して、図形の性質を証明するには、次の 2 点がポイントになる。

1. $AB^2=|\overrightarrow{AB}|^2=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}$ 　　大きさは 2 乗する

2. 3 点O、A、Bが異なるとき、OA⊥OB $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$ 　　垂直

＜例 40＞ OA＝6、OC＝4 である長方形OABCにおいて、辺OA上にOP：PA＝2：1 となる点P、辺OC上にOQ：QC＝3：1 となる点Qをとる。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$、$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$として、次の問に答えよ。



(1) $\overrightarrow{PB}$を、$\vec{a}$、$\vec{c}$で表せ。

$\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP}$

$=(\vec{a}+\vec{c})-\frac{2}{3}\vec{a}$

$=\frac{1}{3}\vec{a}+\vec{c}$

(1) 別解

$\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\vec{a}+\vec{c}$

(2) $\overrightarrow{QA}$を、$\vec{a}$、$\vec{c}$で表せ。

$\overrightarrow{QA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OQ}$

$=\vec{a}-\frac{3}{4}\vec{c}$

(3) PB⊥QAを証明せよ。(※ $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{QA}=0$ を示せばよい。)

$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{QA}=\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{a}-\frac{3}{4}\vec{c}\right)=\frac{1}{3}\vec{a}\cdot\vec{a}-\frac{1}{4}\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{c}-\frac{3}{4}\vec{c}\cdot\vec{c}$

ここで、OA⊥OC より、$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\vec{a}\cdot\vec{c}=0$

OA＝6 より、$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2=OA^2=36$

OC＝4 より、$\vec{c}\cdot\vec{c}=|\vec{c}|^2=OC^2=16$

従って、$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{QA}=\frac{1}{3}\times 36-\frac{3}{4}\times 16=12-12=0$ 　$\therefore \overrightarrow{PB}\perp\overrightarrow{QA}$