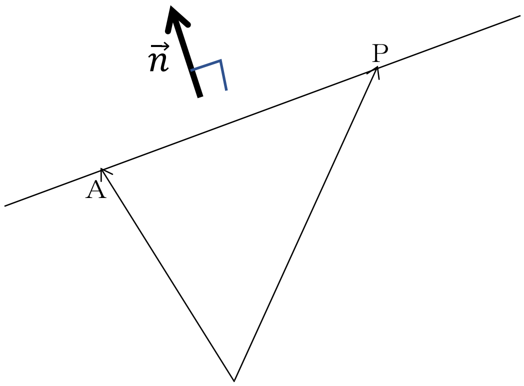
C　ベクトル$\vec{n}$に垂直な直線

点 A($\vec{a}$)を通り，ベクトル$\vec{n}$に垂直な直線 g について考える。



直線 g 上の任意の点を P($\vec{p}$)とおく。

1）点P≠Aのとき、

$\overrightarrow{AP} \perp \vec{n}$　より，$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AP}=0$

である。

$\overrightarrow{AP}=\vec{p}-\vec{a}$　より、

$\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{a})=0$　・・・　①

2）点P＝Aのとき、

$\overrightarrow{AP}=\vec{p}-\vec{a}=\vec{0}$

より、①は成り立つ。

ここで，$\vec{n}$のことを、この直線 g の**法線ベクトル**という。

すなわち、次のことが成り立つ。

点 A($\vec{a}$)を通り，法線ベクトルが$\vec{n}$である直線 g 上の任意の点を P($\vec{p}$)とおくと、

$$\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{a})=0$$

ここで、A(x_1、y_1)、$\vec{n}$＝（a、b）、$\vec{p}$＝（x、y）とおくと、

$\vec{p}-\vec{a}=(x, y)-(x_1, y_1)=(x-x_1, y-y_1)$

$\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{a})=a(x-x_1)+b(y-y_1)=0$

これを整理すると、$ax+by-ax_1-by_1=0$

ここで、$-ax_1-by_1=c$ とすると、この直線の方程式は、$ax+by+c=0$

従って、次のことが成り立つ。

I.　$A(x_1、y_1)$を通り、$\vec{n}=(a、b)$に垂直な直線の方程式は、

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)=0$$

II.　$\vec{n}=(a、b)$は、直線 $ax+by+c=0$ に垂直である。

＜例 42＞次の直線の法線ベクトル$\vec{n}$をいえ。

(1)　$3x+2y-5=0$

$\vec{n}=(3、2)$

(2)　$y=2x+4$

$2x-y+4=0$ と変形し、$\vec{n}=(2、-1)$

または、$-2x+y-4=0$ と変形すると、$\vec{n}=(-2、1)$

いずれでも正解。

※法線ベクトルは、直線に垂直であればいいので、無数に存在する。

＜例 43＞　点 A を通り，ベクトル$\vec{n}$に垂直な直線の方程式を求めよ。

(1)　$A(3,\ 2),\ \vec{n}=(-4,\ 5)$

$-4(x-3)+5(y-2)=0$

これを整理して、

$-4x+5y+2=0$

(2)　$A(1,\ -2),\ \vec{n}=(-2,\ 3)$

$-2(x-1)+3(y+2)=0$

これを整理して、

$-2x+3y+8=0$