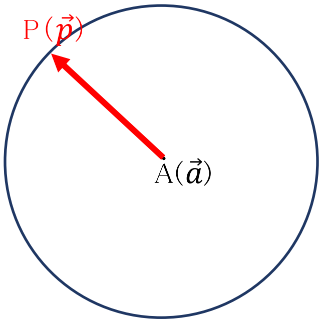
研究　円のベクトル方程式



点 A($\vec{a}$)を中心、半径rの円を考える。
この円上の任意の点を P($\vec{p}$)とおくと、
$|\overrightarrow{AP}| = r$
が成り立つ。従って、
$|\vec{p} - \vec{a}| = r$　　　　　　・・・①
①を点 A($\vec{a}$)を中心とし半径rの**円のベクトル方程式**という。

このとき、$|\overrightarrow{AP}|^2 = \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AP} = (\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{p} - \vec{a}) = r^2$

まとめると、次のようになる。

点 A($\vec{a}$)を中心とし半径rの**円のベクトル方程式**は、

I.　$|\vec{p} - \vec{a}| = r$

II.　$(\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{p} - \vec{a}) = r^2$

＜例 47＞　次のベクトル方程式において、点 P($\vec{p}$)の全体は円を表す。円の中心の位置ベクトルと半径を求めよ。

(1)　$|\vec{p} - \vec{a}| = 2$
　中心　$\vec{a}$
　半径　2

(2)　$|\vec{p} + \vec{a}| = 3$
　中心　$-\vec{a}$
　半径　3

(3)　$|2\vec{p} - 4\vec{a}| = 1$

両辺を 2 で割って、$|\vec{p} - 2\vec{a}| = \frac{1}{2}$

従って、中心 $2\vec{a}$、半径$\frac{1}{2}$

＜練習 48＞次の円の方程式を求めよ。

(1)　中心 A(3、－2)、半径 4

円上の任意の点を P($\vec{p}$)とおくと、この円のベクトル方程式は、

$|\vec{p}-\vec{a}|=4$

ここで、P(x、y)とおくと、

$\vec{p}-\vec{a}=(x,y)-(3,-2)=(x-3,y+2)$

より、

$|\vec{p}-\vec{a}|^2=(x-3)^2+(y+2)^2=4^2$

(2) 中心 A(－2、1)で点 B(1、3)を通る

半径は、$AB=|\vec{b}-\vec{a}|=\sqrt{(1-(-2))^2+(3-1)^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$

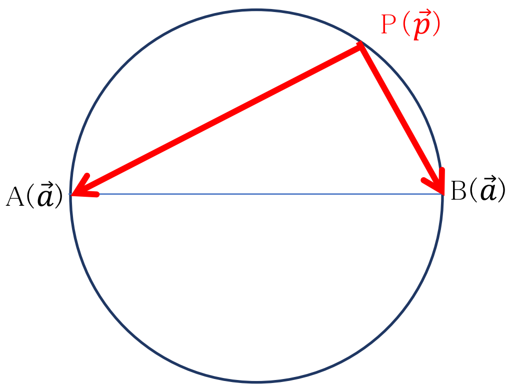
従って、

$\vec{p}-\vec{a}=(x,y)-(-2,1)=(x+2,y-1)$

より、求める円の方程式は

$(x+2)^2+(y-1)^2=13$

$\boxed{\text{演習 10}}$　2 点 A($\vec{a}$)、B($\vec{b}$)を結ぶ線分 AB を直径とする円のベクトル方程式を求めよ。



円上の任意の点を P($\vec{p}$)とする。

1) 点 P≠A、P≠B のとき

$\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{BP}$より、

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$

従って、

$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$

2) 点 P が点 A または点 B に一致するとき

点 P が、点 A と一致する場合は、$\overrightarrow{AP}=\vec{0}$

点 P が、点 B と一致する場合は、$\overrightarrow{BP}=\vec{0}$

いずれも、$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$

従って、

$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$