第2章　空間のベクトル（10）

C 内積の利用

ベクトルの内積を利用して、図形の性質を証明するには、次の2点がポイントになる。

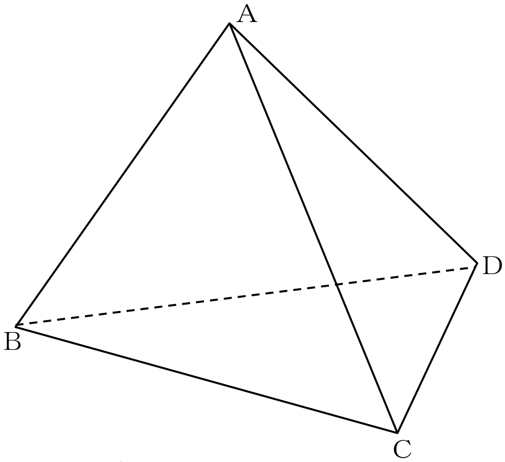
1.　$AB^2=|\overrightarrow{AB}|^2=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}$　　大きさは2乗する

2.　3点O、A、Bが異なるとき、OA⊥OB $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=$　　垂直

＜例21＞　一辺の長さaの正四面体ABCDにおいて、△BCDの重心をGとおく。

$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$、$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$、$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ として、次の問いに答えよ。

(1)　$\vec{b}\cdot\vec{c}$、$\vec{b}\cdot\vec{d}$、$\vec{c}\cdot\vec{d}$を求めよ。



$\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}=a\times a\times\cos60^\circ\ =\frac{1}{2}a^2$

$\vec{b}\cdot\vec{d}=\vec{b}\cdot\vec{d}=a\times a\times\cos60^\circ\ =\frac{1}{2}a^2$

$\vec{c}\cdot\vec{d}=\vec{c}\cdot\vec{d}=a\times a\times\cos60^\circ\ =\frac{1}{2}a^2$

(2) AB⊥CDを証明せよ。

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$を示せばよい。

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\vec{b}\cdot(\vec{d}-\vec{c})=\vec{b}\cdot\vec{d}-\vec{b}\cdot\vec{c}=\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}a^2=0$　従って、AB⊥CD

(3) $\overrightarrow{AG}$を$\vec{b}$、$\vec{c}$、$\vec{d}$ とで表し、AG⊥BCを証明せよ。

Gは△BCDの重心より、$\overrightarrow{AG}=\dfrac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{3}$

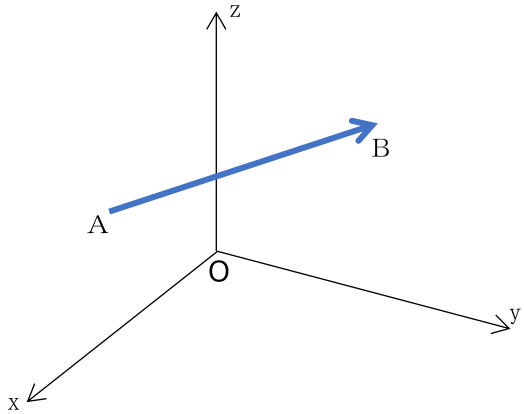
$$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BC}=\left(\frac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{3}\right)\cdot(\vec{c}-\vec{b})=\frac{1}{3}\left(\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{d}\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot\vec{d}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(-\vec{b}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{c}+\vec{d}\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot\vec{d}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(-a^2+a^2+\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}a^2\right)=0$$

$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BC}=0$より、従って、AG⊥BC

6 座標空間における図形



$\boxed{\text{A}}$ 2点間の距離と内分点・外分点の座標

空間の2点A(a_1, a_2, a_3)、B(b_1, b_2, b_3)のとき、

$$\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1, b_2-a_2, b_3-a_3)$$

であるから、2点A，B間の距離ABは

$$AB=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$$

とくに、$OA=\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2}$

＜例22＞　2点A$(1,-4,7)$，B$(7,2,-5)$、C$(-2、3、4)$のとき、次の線分の長さを求めよ

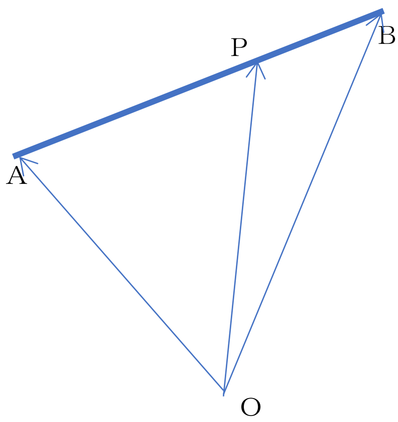
(1) $OA=\sqrt{1^2+(-4)^2+7^2}=\sqrt{1+16+49}=\sqrt{66}$

(2) $AB=\sqrt{36+36+144}=\sqrt{216}=6\sqrt{6}$

(3) $BC=\sqrt{81+1+81}=\sqrt{163}$

線分ABをm：nの比に内分する点をPとすれば，

$$\overrightarrow{OP}=\frac{m\vec{b}+n\vec{a}}{m+n}$$



より，点P(x、y、z)の座標は，

$$x=\frac{mb_1+na_1}{m+n}\qquad y=\frac{mb_2+na_2}{m+n}\qquad z=\frac{mb_3+na_3}{m+n}$$

※線分ABをm：nの比に外分する点をQとすれば，

$$\overrightarrow{OQ}=\frac{m\vec{b}-n\vec{a}}{m-n}$$