第2章　空間のベクトル（12）

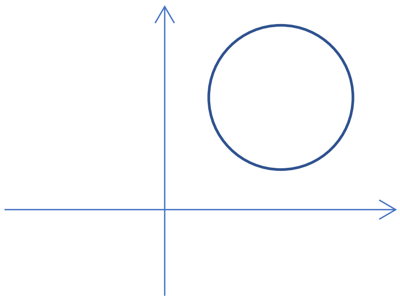
C 球面の方程式

定点Cからの距離が一定の値rである点Pは、

$|\overrightarrow{CP}|=|\ \vec{p}-\vec{a}\ |=r$　　　・・・①

が成り立つ。

このとき、点Pの描く図形は、



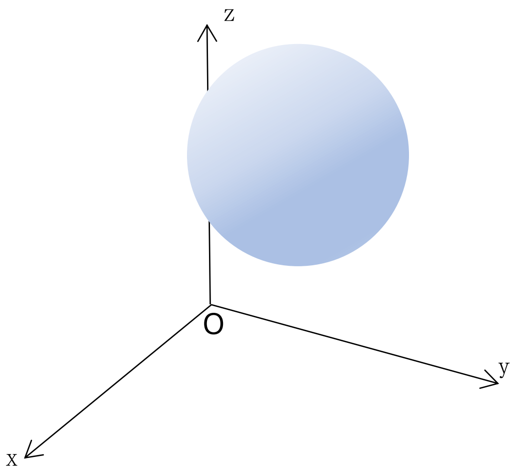
(1) 平面上の場合は、<u>円</u>

C(a、b)とし、P(x、y)とおくと、

$|\overrightarrow{CP}|=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$

両辺を2乗して、$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

これを中心(a、b)半径rの円の方程式という。



(2) 空間内の場合は、<u>球面</u>

C(a、b、c)とし、P(x、y、z)とおくと、

$|\overrightarrow{CP}|=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}=r$

両辺を2乗して、

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-b)^2=r^2$$

これを点C(a、b、c)を中心、半径rの球面の方程式という。

> 点 C(a、b)を中心、半径rの**円の方程式**は、$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$
>
> 点C(a、b、c)を中心、半径rの**球面の方程式**は、
>
> $$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

＜例27＞　次のベクトル方程式において、点P($\vec{p}$)の全体は円または球面を表す。このとき、中心の位置ベクトルと半径を求めよ。

(1)　$|\vec{p}-\vec{a}|=2$

中心　$\vec{a}$　　　　　半径　2

(2)　$|\vec{p}+\vec{a}|=3$

中心　$-\vec{a}$　　　　　半径　3

(3)　$|2\vec{p}-4\vec{a}|=1$

両辺を2で割って、$|\vec{p}-2\vec{a}|=\frac{1}{2}$、中心　$2\vec{a}$　　　　　半径　$\frac{1}{2}$

＜例28＞次の方程式が表す図形は何か。

(1) $x^2+y^2+4x-2y=0$

$(x+2)^2-4+(y-1)^2-1=0$

$(x+2)^2+(y-1)^2=5$

より、中心(－2、1)、半径$\sqrt{5}$の円

(2) $x^2+y^2+z^2-6x+8y-2z+17=0$

$(x-3)^2-9+(y+4)^2-16+(z-1)^2-1+17=0$

$(x-3)^2+(y+4)^2+(z-1)^2=9$

より、中心(3、－4、1)、半径3の球面

＜例29＞次の球面の方程式を求めよ。

(1) 中心(－1,2,－3)，半径5である球面

$(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=25$

(2) 点C(1,－2,2)を中心とし，点A(1,1,5)を通る。

求める球面は、半径をrとおくと、$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=r2$とおける。

これが、点A(1,1,5)を通るので、

$0+9+9=r2$ ∴$r2=18$

従って、$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=18$

(3) 2点A(2,2,－3)，B(－2,0,－1)を結ぶ線分を直径とする。

この球面の半径をr、中心をCとおくと、

C＝ABの中点より、$x=\dfrac{2+(-2)}{2}$、$y=\dfrac{2+0}{2}$、$z=\dfrac{-3+(-1)}{2}$より、C(0、1、－2)

また、$r=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{\sqrt{(-2-2)^2+(0-2)^2+(-1-(-3))^2}}{2}=\dfrac{\sqrt{16+4+4}}{2}=\sqrt{6}$

∴ $x^2+(y-1)^2+(z+2)^2=6$

＜例30＞球面$(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=16$、とxy平面が交わる部分は円である。この円の中心と半径を求めよ。

$(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=16$

に、xy平面の方程式z＝0を代入すると、

$(x-2)^2+(y+1)^2+9=16$ ∴ $(x-2)^2+(y+1)^2=7$

これは、xy平面上で円を表す。従って、

中心(2、－1、0)、半径$\sqrt{7}$