

4 ベクトルの内積

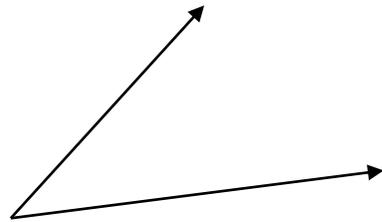
A ベクトルの内積

平面の場合と同様に、2つのベクトル  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  のなす角を  $\theta$  として、 $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  の内積を

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

によって定義する。ただし、 $\theta$  の値の範囲は、

$$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$$



また、 $\vec{a} = \vec{0}$ ,  $\vec{b} = \vec{0}$  のときは、 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$  と定める。

このとき、次のことが成り立つ。

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$  のとき、

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

2つのベクトル  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  のなす角を  $\theta$  とすると、

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

また、平面ベクトルの場合と同様に、次のことが成り立つ。ただし、 $k$  は実数。

(I)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

(II)  $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k\vec{a} \cdot \vec{b}$

(III)  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

(IV)  $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

<例13> 次の2つのベクトルの内積およびそのなす角  $\theta$  を求めよ。

$$(1) \vec{a} = (1, 0, -1), \vec{b} = (1, 2, -2)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times 1 + 0 \times 2 + (-1) \times (-2) = 1 + 2 = 3$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{1+0+1} = \sqrt{2}, \quad |\vec{b}| = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{3}{\sqrt{2} \times 3} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ここで、 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  より、 $\theta = 45^\circ$

$$(2) \vec{a} = (1, -1, 1), \vec{b} = (1, \sqrt{6}, -1)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times 1 + (-1) \times \sqrt{6} + 1 \times (-1) = 1 - \sqrt{6} - 1 = -\sqrt{6}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}, \quad |\vec{b}| = \sqrt{1+6+1} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{-\sqrt{6}}{\sqrt{3} \times 2\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}$$

ここで、 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  より、 $\theta = 120^\circ$

<例14> 3点A(-2, 1, 3)、B(-3, 1, 4)、C(-1, 3, 1)を頂点とする $\triangle ABC$ において、 $\angle BAC$ の大きさを求めよ。

$\angle BAC$ は、 $\vec{AB}$ と $\vec{AC}$ のなす角である。

$$\vec{AB} = (-3, 1, 4) - (-2, 1, 3) = (-1, 0, 1)$$

$$\vec{AC} = (-1, 3, 1) - (-2, 1, 3) = (1, 2, -2)$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = (-1) \times 1 + 0 \times 2 + 1 \times (-2) = -1 - 2 = -3$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{1+0+1} = \sqrt{2}$$

$$|\vec{AC}| = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3$$

$\angle BAC = \theta$  とおくと、

$$\cos \theta = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| |\vec{AC}|} = \frac{-3}{\sqrt{2} \times 3} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

ここで、 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  より、 $\theta = 135^\circ$

