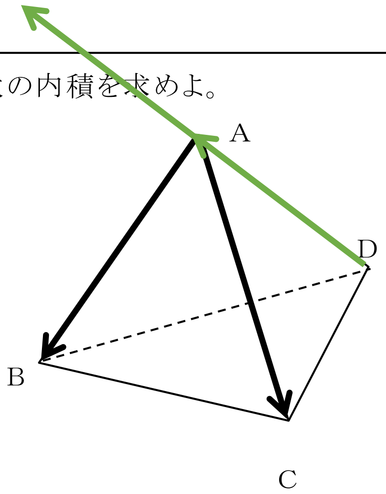
# 第2章　空間のベクトル（７）

＜例15＞1辺の長さが4の正四面体ABCDにおいて、次の内積を求めよ。




(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4\times4\times\cos60°=8$

(2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DA}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DA}=4\times4\times\cos\underline{120°}=-8$

$\boxed{\text{B}}$ ベクトルの垂直

$\vec{a}\neq\vec{0}$、$\vec{b}\neq\vec{0}$のとき、

$$\vec{a}\perp\vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b}=$$

(1) $\vec{a}\perp\vec{b}$のとき

$\vec{a}$、$\vec{b}$=のなす角 $\theta$ は、90° であるから、$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=|\vec{a}||\vec{b}|\cos90°=0$

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$のとき

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=0$、$\vec{a}\neq\vec{0}$、$\vec{b}\neq\vec{0}$より、$\cos\theta=0$、$0°\leqq\theta\leqq180°$ より、$\theta=90°$

従って、$\vec{a}\perp\vec{b}$である。

＜例16＞ $\vec{a}=(2,-3,-1)$ , $\vec{b}=(1,-1,2)$ のとき, $x\vec{a}+\vec{b}$ が, $\vec{a}$に垂直になるように, $x$の値を定めよ。

$x\vec{a}+\vec{b}$ が, $\vec{a}$に垂直であるから、$(x\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{a}=0$

$\therefore$ $(x\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{a}=x\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{a}=0$

ここで、$|\vec{a}|^2=4+9+1=14$、$\vec{b}\cdot\vec{a}=2+3-2=3$より、

$14x+3=0$　$\therefore$よって、$x=-\dfrac{3}{14}$

演習３

2つのベクトル$\vec{a}=(1,2,6)$ , $\vec{b}=(-1,1,0)$ の両方に垂直な単位ベクトルを求めよ。

求めるベクトルを$\vec{p}$＝(x、y、z)とおく。

$\vec{p}$は単位ベクトルより、$|\vec{p}|=1$

∴ $|\vec{p}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=1$ 、$x^2+y^2+z^2=1$ ・・・ ①

$\vec{p}\perp\vec{a}$ より、$\vec{p}\cdot\vec{a}=0$

∴ $\vec{p}\cdot\vec{a}=x+2y+6z=0$ ・・・ ②

$\vec{p}\perp\vec{b}$ より、$\vec{p}\cdot\vec{b}=0$

∴ $\vec{p}\cdot b=-x+y=0$ ・・・ ③

③より、$y=x$

これを②へ代入して、$x+2x+6z=0$ ∴ $z=-\frac{1}{2}x$

したがって、①に代入し、

$x^2+x^2+\frac{x^2}{4}=\frac{9x^2}{4}=1$

$\therefore x^2=\frac{4}{9}$ 、$x=\pm\frac{2}{3}$

従って、求めるベクトルは、$\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$、$\left(-\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$