

第2章 空間のベクトル (8)

5 ベクトルの図形への応用

A 位置ベクトル

空間においても、1つの点Oを固定すると、任意の点Aの位置は、ベクトル $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ によって定められる。このベクトル \vec{a} を点Oに関する点Aの位置ベクトルという。

このとき、次のことが成り立つ。

点A, B, C, Pの位置ベクトルを \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , \vec{p} として、

(I) 線分ABを $m:n$ の比に分ける点をPとすると、

$$\vec{p} = \frac{m\vec{b} + n\vec{a}}{m+n}$$

とくに、点Pが線分ABの midpoint のとき、 $\vec{p} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$

(II) $\triangle ABC$ の重心Gの位置ベクトルは、 $\overrightarrow{OG} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$

<例17> OA, OB, OCを3つの辺にもつ平行六面体において、Oと向かい合った頂点をD、 $\triangle ABC$ の重心をGとし、 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする。

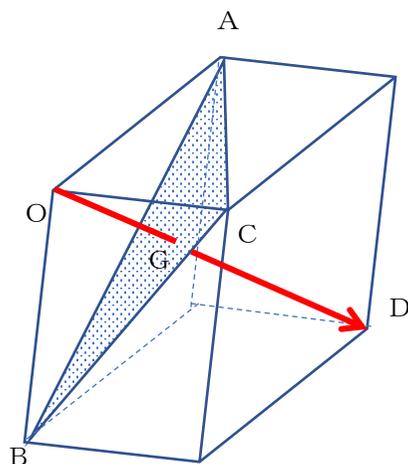
(1) \overrightarrow{OD} を \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} で表せ。 $\overrightarrow{OD} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

(2) \overrightarrow{OG} を \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} で表せ。

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$$

(3) 直線ODは、点Gを通ることを示せ。

(1)、(2)より、 $\overrightarrow{OD} = 3\overrightarrow{OG}$



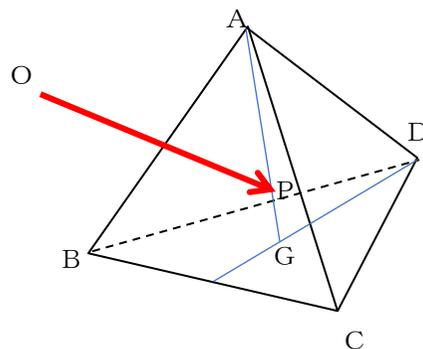
<例18> 四面体ABCDの1つの面BCDの重心をGとし、AGを3:1に内分する点をPとする。任意の点Oに対して、 \overrightarrow{OP} を \overrightarrow{OA} 、 \overrightarrow{OB} 、 \overrightarrow{OC} 、 \overrightarrow{OD} で表せ。

点Gは、 $\triangle BCD$ の重心より、

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{3}$$

点Pは、AGを3:1に内分するので、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \frac{3\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OA}}{3+1} = \frac{(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) + \overrightarrow{OA}}{4} \\ &= \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{4} \end{aligned}$$



演習4 3点A(2, -1, 3), B(3, 2, 1), C(a, b, 5)が一直線上にあるように、定数a, bの値を定めよ。

点Pが、直線AB上にあるとき、 $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ が成り立つ。ただし、kは実数

$$\overrightarrow{AB} = (3, 2, 1) - (2, -1, 3) = (1, 3, -2)$$

$$\overrightarrow{AC} = (a, b, 5) - (2, -1, 3) = (a-2, b+1, 2)$$

$$\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB} \text{ とおくと、}$$

$$(a-2, b+1, 2) = k(1, 3, -2)$$

成分を比較して、

$$a-2=k$$

$$b+1=3k$$

$$2=-2k$$

これを解いて、 $k=-1$ 、 $a=1$ 、 $b=-4$