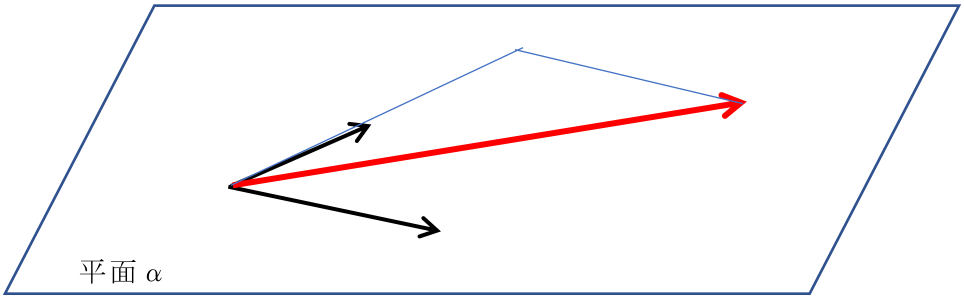
第2章　空間のベクトル（9）

B 平面ABC上の点の位置ベクトル

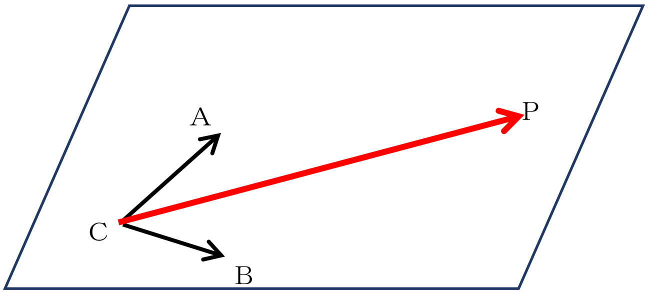
$\vec{a}$、$\vec{b}$が，平行でなく，零ベクトルでないとき，この2つのベクトルによって，1つの平面 α が決定する。この平面 α 上の任意のベクトル$\vec{p}$は，$\vec{a}$、$\vec{b}$用いて

$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$

の形で一意的に表すことができる。



＜例19＞3点A、B、Cで決定する平面上に点Pがあるとき、$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$、$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$、$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ として、ベクトル$\overrightarrow{OP}$を$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$で表せ。



$\overrightarrow{CP}=s\overrightarrow{CA}+t\overrightarrow{CB}$

となる実数s、tがある。これより、

$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OC}=s(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})+t(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})$

$\therefore \overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OC}+s\overrightarrow{OA}-s\overrightarrow{OC}+t\overrightarrow{OB}-t\overrightarrow{OC}$

$=\vec{c}+s\vec{a}-s\vec{c}+t\vec{b}-t\vec{c}$

$=s\vec{a}+t\vec{b}+(1-s-t)$

ここで、$1-s-t=u$とおくと、$\overrightarrow{OP}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$

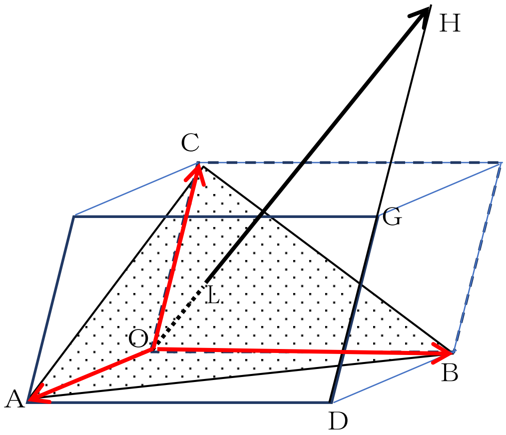
点Pが、平面ABC上にある条件は、

$\overrightarrow{OP}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$、

ただし、$s+t+u=1$

（参考）$\overrightarrow{OP}=s\vec{a}+t\vec{b}$、$s+t=1$　のとき、点Pはどこにあるか？　直線AB上

＜例20＞　平行六面体で、$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$、$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$、$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$とする。辺DGの延長上に、DG＝GHとなるように点Hをとる。直線OHと平面ABCの交点をLとするとき、ベクトル$\overrightarrow{OL}$を$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$で表せ。



$\overrightarrow{OH}=\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}$

3点O、L、Hは一直線上にあるので、

$\overrightarrow{OL}=k\overrightarrow{OH}$

とおける。

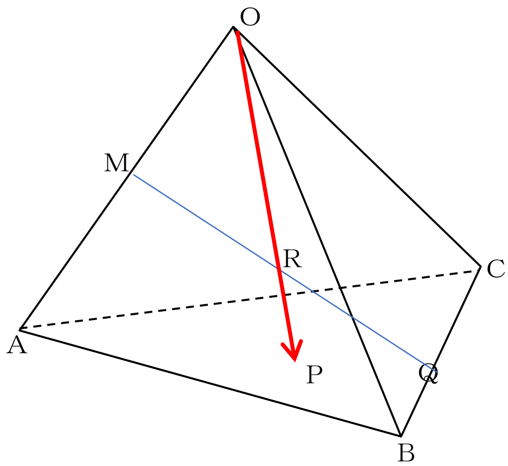
$\overrightarrow{OL}=k(\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c})=k\vec{a}+k\vec{b}+2k\vec{c}$

点Lは、平面ABC上の点より、

$k+k+2k=1\quad\therefore k=\frac{1}{4}$

$\overrightarrow{OL}=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{2}{4}\vec{c}$

$\boxed{\text{演習5}}$ 四面体OABCにおいて、辺OAの中点をM、辺BCを1:2に内分する点をQ、線分MQの中点をRとして、直線ORと平面ABCの交点をPとする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$、$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$、$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$として、ベクトル$\overrightarrow{OP}$を$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$で表せ。



$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\vec{a}$

$\overrightarrow{OQ}=\frac{\vec{c}+2\vec{b}}{1+2}=\frac{\vec{c}+2\vec{b}}{3}$

$\overrightarrow{OR}=\frac{\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OQ}}{2}=\frac{\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{\vec{c}+2\vec{b}}{3}}{2}=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}$

3点O、R、Pは一直線上にあるので、

$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OR}$

とおける。

$\overrightarrow{OP}=k\left(\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}\right)=\frac{k}{4}\vec{a}+\frac{k}{3}\vec{b}+\frac{k}{6}\vec{c}$

点Pは、平面ABC上の点より、

$\frac{k}{4}+\frac{k}{3}+\frac{k}{6}=1\quad\therefore k=\frac{4}{3}$

$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{4}{9}\vec{b}+\frac{2}{9}\vec{c}$