（3）　1･2･3＋2･3･4＋3･4･5＋･･･････････＋n(n＋1)(n＋2)

$$=\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)$$

$$=\sum_{k=1}^{n} (k^3+3k^2+2k)$$

$$=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+3\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+2\times\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{n(n+1)}{4}\{n(n+1)+2(2n+1)+4\}$$

$$=\frac{n(n+1)(n^2+5n+6)}{4}=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

※以下のように、全て展開してもよい。

$$=\frac{n^2(n^2+2n+1)}{4}+3\times\frac{n(2n^2+3n+1)}{6}+2\times\frac{n^2+n}{2}$$

$$=\frac{n^4+2n^3+n^2}{4}+\frac{4n^3+6n^2+2n}{4}+\frac{4n^2+4n}{4}$$

$$=\frac{n^4+6n^3+11n^2+6n}{4}$$

初項 a、公比 r（r≠1）の等比数列の第k項は、$a_k=a\cdot r^{k-1}$　より、次の式が成り立つ。

Ⅳ. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a\cdot r^{k-1}=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} r^k=\frac{r(r^n-1)}{r-1}$

※初項 r 、公比 r の等比数列の和

<例 20>　次の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2\cdot 3^{k-1}=\frac{2(3^n-1)}{3-1}=3^n-1$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^k=\frac{2(2^n-1)}{2-1}=2(2^n-1)$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2^{k-1}+3^k)=\frac{2^n-1}{2-1}+\frac{3(3^n-1)}{3-1}=2^n-1+\frac{3^{n+1}-3}{2}=2^n+\frac{3^{n+1}}{2}-\frac{5}{2}$

## ７.階差数列

### A 階差数列

数列｛$a_n$｝に対して，隣り合う 2 項の差をとって順に並べると新しい数列｛$b_n$｝が得られる。この数列｛$b_n$｝を数列｛$a_n$｝の**階差数列**という。

＜例 22＞　次の数列の階差数列を考えて、次の数列の第 6 項を求めよ。

1、2、6、13、23、

1、4、7、10、13

より、$a_6$＝23＋13＝36

### B 階差数列から一般項を求める。

｛$a_n$｝　$a_1$、$a_2$、$a_3$、・・・・・・・・・・・・・・・・・，$a_{n-1}$、$a_n$、・・・・・・・・・・・

｛$b_n$｝　$b_1$、$b_2$、$b_3$、・・・・・・・・・・・・・・・・・・、　、・・・・・・・・・・・

このとき，

$b_1 = a_2 - a_1$

$b_2 = a_3 - a_2$

$b_3 = a_4 - a_3$

$b_{n-1} = a_n - a_{n-1}$

上の式の両辺を加えると、

$$b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{n-1} = a_n - a_1$$

$$\therefore\ a_n = a_1 + (b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{n-1})$$

即ち，次のことが成り立つ。

数列｛$a_n$｝の階差数列を｛$b_n$｝とするとき、

$n \geq 2$ のとき、$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$

**n＝1 のときは、正しいことを確認する。**