〈例 23〉 次の数列$\{a_n\}$について，階差数列を求めることにより一般項a_nを求めよ。

（1） 1， 2， 5， 10， 17， 26， ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

この数列の階差数列を$\{b_n\}$とおくと、

$\{b_n\}$ 1、3、5、7、9、・・・・・

より、$b_n = 1+(n-1)\cdot 2 = 2n-1$

従って、

$n \geqq 2$ のとき、$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)$

$$= 1 + 2 \times \frac{n(n-1)}{2} - (n-1) = n^2 - 2n + 2$$

ここで、

$a_1 = 1 - 2 + 2 = 1$

より、n＝1 の場合も成立する。

従って、

$a_n = n^2 - 2n + 2$

（2） 3， 4， 8， 15， 25、・・・・

この数列の階差数列を$\{b_n\}$とおくと、

$\{b_n\}$ 1、4、7、10、・・・・・

より、$b_n = 1+(n-1)\cdot 3 = 3n-2$

従って、

n≧2 のとき、

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 3 + \sum_{k=1}^{n-1}(3k-2)$$

$$= 3 + 3 \times \frac{n(n-1)}{2} - 2(n-1) = \frac{3n^2 - 7n + 10}{2}$$

$$a_1 = \frac{3 - 7 + 10}{2} = 3$$

より、n＝1 の場合も成立する。従って、

$$a_n = \frac{3n^2 - 7n + 10}{2}$$

演習7　次の数列$\{a_{\mathrm{n}}\}$について、次の問いに答えよ。

$\{a_{\mathrm{n}}\}$：　5，6，8，12，20，36・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

(1)　数列$\{a_{\mathrm{n}}\}$の階差数列を$\{\mathrm{b_n}\}$として、一般項$\mathrm{b_n}$を求めよ。

(2)　数列$\{a_{\mathrm{n}}\}$の一般項を求めよ。

(3)　数列$\{a_{\mathrm{n}}\}$の初項から第n項までの和$\mathrm{S_n}$を求めよ。

(1)

$\{\mathrm{b_n}\}$　1、2、4、8、16、・・・・・

より、$\mathrm{b_n} = 1 \cdot 2^{n-1}$＝1

(2)

$$a_{\mathrm{n}} = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 5 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1}$$

$$= 5 + \frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1}$$

$$= 2^{n-1} + 4$$

$a_1 = 2^0 + 4 = 1 + 4 = 5$

より、n＝1 の場合も成立する。従って、

$a_n = 2^{n-1} + 4$

ヒント

$$\sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1}$$

は、初項 1、公比 2 の等比数列の初項から第 n－1 項までの和である。

(3)

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (2^{k-1} + 4) = \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} + \sum_{k=1}^{n} 4$$

$$= \frac{2^n - 1}{2 - 1} + 4n = 2^n + 4n - 1$$