７．いろいろな数列の和

＜数列の和＞　Σに入る式が k の整式であれば、次のように和の計算をすることができる。

$$\sum_{k=1}^{n}(ak^3+bk^2+ck+d)=a\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{4}+b\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+c\cdot\frac{n(n+1)}{2}+nd$$

また、k が指数に入れば、＿等比＿＿数列なので、初項と公比を確認して、

$$\sum_{k=1}^{n}a\cdot r^{k-1}=\frac{a(r^n-1)}{r-1}\quad \text{ただし、}r\neq 1$$

$\boxed{\text{A}}$ いろいろな数列の和

$\boxed{\text{演習８}}$ 次の分数の和を第 n 項まで求めよ。

(1) $\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot4}+\dfrac{1}{4\cdot5}+\cdots\cdots\cdots$

> 分数式の和の求めかた ⟹ 第 n 項を，２つの分数の差に変形する。例えば、
>
> $$\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}=\frac{k+1-k}{k(k+1)}=\frac{1}{k(k+1)}$$
>
> より、
>
> $$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$$

$$a_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\quad\cdots\cdots\cdots ①$$

①より，第 n 項までの和を Sn とおくと，

$$S_n=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$

$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$

(2) $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 7}+\dfrac{1}{7\cdot 9}+\cdots$

$$a_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

ここで、

$$\frac{1}{2\mathrm{k}-1}-\frac{1}{2\mathrm{k}+1}=\frac{(2k+1)-(2k-1)}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{2}{(2k-1)(2k+1)}$$

より、

$$\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$

従って、各項を分数の差に変形して、

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 9}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$=\frac{n}{2n+1}$$

(3) $\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots\cdots\cdots$

〈hint〉 分母の有理化

$$\mathrm{a_n}=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$

$$S_n=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$$

$$=\left(\sqrt{2}-\sqrt{1}\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{4}-\sqrt{3}\right)+\cdots\cdots+\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$$

$$=-1+\sqrt{n+1}$$