(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}$

$$\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}=\frac{k+2-k}{k(k+2)}=\frac{2}{k(k+2)}$$

より、

$$a_k=\frac{1}{k(k+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$

従って、各項を分数の差に変形して、

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}$$

$$=\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{2\cdot4}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{4\cdot6}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+2)}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{3}{2}-\frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}\right\}$$

$$=\frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}$$

$1+x+x^2+x^3+\cdots\cdots\cdots\cdots+x^{n-1}=\dfrac{1-x^n}{1-x}\quad (x\neq 1)$

（証明）

$S=1+x+x^2+x^3+\cdots\cdots\cdots\cdots+x^{n-1}$ とおく。

$xS=x+x^2+x^3+\cdots\cdots\cdots\cdots+x^n$

両辺を引いて、$S-xS=1-x^n$ ∴ $(1-x)S=1-x^n$ ここで、$x\neq 1$ より、

$$S=\frac{1-x^n}{1-x}$$

$\boxed{\text{演習 9}}$ 数列 $1,\ 2x,\ 3x^2,\ 4x^3,\ \cdots\cdots\cdots\cdots$について、次の問いに答えよ。

（1） 一般項a_nを求めよ。

(2) $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$を求めよ。

（1）

$a_n=nx^{n-1}$

（2）

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\cdots\cdots\cdots+nx^{n-1}$$

とおくと,

$$xS_n=x+2x^2+3x^3+4x^3+\cdots\cdots\cdots\cdots+(n-1)x^{n-1}+nx^n$$

辺々を引いて

$$S_n-xS_n=1+x+x^2+x^3+\cdots\cdots\cdots\cdots+x^{n-1}-nx^n$$

ここで、$x\neq 1$ のとき、

$$(1-x)S_n=\frac{1-x^n}{1-x}-nx^n=\frac{1-x^n-nx^n+nx^{n+1}}{1-x}=\frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{1-x}$$

$$\therefore\ S_n=\frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}$$

$x=1$ のときは、

$$S_n=1+2+3+4+\cdots\cdots\cdots\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$