B 群に分けられた数列

演習 10 偶数を次のような群に分けて，第 n 群が n 個の偶数を含むようにする。

2 | 4, 6 | 8, 10, 12 | 14, 16, 18, 20 | 22, 24, ･･･

(1) この数列の第k項a_kを求めよ。

(2) 第8群の最初の数は何か

(3) 第n群の最初の数をnで表せ。

(1) 初項2、公差2の等差数列より、$a_k=2+(k-1)\times 2=2k$

(2) 各群の項数は、1、2、3、････、であるから、第7群の終わりまでの項数は、

$$1+2+3+\cdots\cdots+7=\frac{7(1+7)}{2}=28$$

従って、第8群の最初の数は、28＋1＝29番目の偶数である。

k番目の偶数は、2k なので、

29番目の偶数は$a_{29}=29\times 2=58$である。したがって第8群の最初の数は、58

(3) 第1群から第(n－1)群までの項数は

$$1+2+3+\cdots\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$$

従って，第n群の最初の数は、この数列の $\frac{n(n-1)}{2}+1$ 番目の数である。

$$a_{\left\{\frac{n(n-1)}{2}+1\right\}}=2\cdot\left\{\frac{n(n-1)}{2}+1\right\}=n^2-n+2$$

(別解) 第n群の最初の数を並べた数列を$\{x_n\}$とおくと

$\{x_n\}$ 2、4、8、14、22、32、･････

階差数列$\{y_n\}$は、2、4、6、8、････

より、初項2、公差2の等差数列であるから、$y_n=2+(n-1)\times 2=2n$

従って、n≧2のとき、

$$x_n=x_1+\sum_{k=1}^{n-1}y_k=2+\sum_{k=1}^{n-1}2k=2+2\times\frac{n(n-1)}{2}=n^2-n+2$$

となり、$x_1=1-1+2=2$より、n＝1の場合も成立する。

従って、$x_n=n^2-n+2$

(4)　第15群の数の総和を求めよ。2

(5)　1000は, 第何群の何番目か

(4)

第15群の最初の数は、$x_{15}=15^2-15+2=212$

第16群の最初の数は、$x_{16}=16^2-16+2=242$ より、第15群は、

212、214、・・・・・・、240

となる。

第15群の項数は15であるから、第15群の数の和は、等差数列の和の公式より、

$$\frac{15(212+240)}{2}=3390$$

(5)

$$x_{31}=31^2-31+2=932$$
$$x_{32}=32^2-32+2=994$$
$$x_{33}=33^2-33+2=1058$$

より、1000は、第32群の数である。

994、996、998、1000、・・・・

より、1000は、第32群の4番目

＜例25＞　正の奇数を次のような群に分ける。ただし第n群にはn個の奇数が入る。

1｜3、5｜7、9、11｜13、15、17、19｜21、・・・・・・

第10群に入るすべての数の和を求めよ。

第k番目の奇数は、2k－1である、

第 1 群から、第 9 群までの項数は、

$$1+2+3+\cdots\cdots+9=\frac{9(1+9)}{2}=45$$

なので、第 10 群の最初の数は、45＋1＝46 番目の奇数になるので、2×46－1＝91

また、第10群の最後の数は、55番目の奇数なので、2×55－1＝109より、第10群は、

91、92、・・・・・・、109

となるので、総和は、

$$\frac{10(91+109)}{2}=1000$$