## 第３節　漸化式と数学的帰納法

### ９．漸化式

### A　数列の漸化式と項

＜例＞　数列$\{a_n\}$が次のように定義されている。

$a_1=1$ ………①

$a_{n+1}=2a_n+1$（n＝1、2, 3, ………）………②

この数列の第2項、第3項を求めてみよ。

$a_2=2a_1+1=2\times1+1=3$

$a_3=2a_2+1=2\times3+1=7$

このように、

| |
|---|
| ①　数列の初めのいくつかの値 |
| ②　項の値を決めていく規則を示す関係式 |

があれば、順次、項の値が決まっていく。このように数列を定義することを**帰納的定義**といい、

②のような各項の関係式を**漸化式**という。

<例26>　数列$\{a_n\}$が次のように定義されているとき、$a_2$、$a_3$、$a_4$、$a_5$を求めよ。

(1)　$a_1=2,\ a_{n+1}=3a_n-2$（n＝1、2, 3, 4, ……………）

$a_2=3a_1-2=3\times2-2=4$

$a_3=3a_2-2=3\times4-2=10$

$a_4=3a_3-2=3\times10-2=28$

$a_5=3a_4-2=3\times28-2=82$

(2)　$a_1=1$、$a_2=1$、$a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$（n＝1, 2, 3, 4, ……………）

$a_3=a_1+a_2=1+1=2$

$a_4=a_2+a_3=1+2=3$

$a_5=a_3+a_4=2+3=5$

B 漸化式で定められた数列の一般項

<例26>からも分かるように，数列において、漸化式が与えられると，この数列の項の値は順次算出されるが，例えば$a_{10}$の値は，$a_9$まで求めないと分からない。

そこで漸化式が与えられているとき、その数列の一般項を求めることを考えよう。

なお、漸化式から一般項を求めることを「**漸化式を解く**」という。

**（Ⅰ） $a_1$＝a ，$a_{n+1}$＝$a_n$＋d**

この数列$\{a_n\}$は　等差　数列である。　公差はd

$a_n$＝a＋(n－1)d

<例27>　次の条件によって定められた数列の一般項を求めよ。(次の漸化式を解け)

（1）　$a_1=2$，$a_{n+1}=a_n+3$

$a_n$＝2＋(n－1)×3＝3n－1

（2）　$a_1=1$，$a_{n+1}-a_n=-2$

$a_n$＝1＋(n－1)×(－2)＝－2n＋3

**（Ⅱ） $a_1$＝a ，$a_{n+1}$＝r・$a_n$**

この数列$\{a_n\}$は，　等比　数列である。公比＝r

$a_n$＝a・$r^{n-1}$

<例28>　次の条件によって定められた数列の一般項を求めよ。(次の漸化式を解け)

（1）　$a_1=1$，$a_{n+1}=-3a_n$

$a_n=1\cdot(-3)^{n-1}$

（2）　$a_1=2$，$a_{n+1}=2a_n$

$a_n=2\cdot 2^{n-1}=2^n$

(3)　$a_1=3, \dfrac{a_{n+1}}{a_n}=-2$

$a_{n+1}=-2a_n$より、　$a_n=3\cdot(-2)^{n-1}$