## 2 項間の漸化式の解法$\boxed{\text{重要}}$

（Ⅲ）$\boldsymbol{a_1}$＝a ，$\boldsymbol{a_{n+1}=pa_n+q}$（ただし、p、qは定数）

この漸化式は、

p＝1 のときは、$\boldsymbol{a_{n+1}=a_n+q}$ となり、これは、公差qの等差数列

q＝0 のときは、$\boldsymbol{a_{n+1}=pa_n}$となり、これは、公比pの等比数列

となるので、p≠1、q≠0 の場合について考える。

例えば、

$a_1=2$ ‥‥‥‥‥‥‥‥①

$a_{n+1}=2a_n+1$ ‥‥‥‥‥‥‥‥②

は、次のようにして必ず解ける。

| | 手順 | 式変形、解答 |
|---|---|---|
| 0 | 漸化式② | $a_{n+1}=2a_n+1$ ‥‥‥‥‥‥② |
| 1 | ②において、$a_{n+1}$、$a_n$もαとおく | $\alpha=2\alpha+1$ ‥‥‥‥‥‥③ |
| 2 | ②－③を計算 | $a_{n+1}-\alpha=2(a_n-\alpha)$ |
| 3 | $\boldsymbol{c_n=a_n-\alpha}$とおくと、 | $c_{n+1}=2c_n$ |
| 4 | 数列$\{c_n\}$は、等比数列<br>初項＝$c_1$、公比＝2 | |
| 5 | ③より、αを求め、$c_1$を求める。 | $\alpha=-1$<br>$c_1=\boldsymbol{a_1-\alpha}=2-(-1)=3$ |
| 6 | $c_n$を求める | $c_n=3\cdot2^{n-1}$ |
| 7 | $a_n$を求める | $a_n=\alpha+c_n=-1+3\cdot2^{n-1}$ |

＜例 30＞次式で定められる数列$\{\mathrm{a_n}\}$の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=1$　　　$\cdots\cdots\cdots$①

$a_{n+1}=3a_n-1$　　　$\cdots\cdots\cdots$②

②より、　$\alpha=3\alpha-1$　　$\cdots\cdots\cdots$③　とおく。

②−③より、$a_{n+1}-\alpha=3(a_n-\alpha)$

$\boldsymbol{c_n=a_n-}$ $\alpha$ とおくと、$c_{n+1}=3c_n$　∴　$c_n=c_1\cdot 3^{n-1}$

ここで、③より、$\alpha=\dfrac{1}{2}$

従って、$c_1=a_1-\alpha=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore c_n=\dfrac{1}{2}\cdot 3^{n-1}$

よって、$a_n=\alpha+c_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cdot 3^{n-1}$

(2)　$a_1=1$　　　$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$①

$4a_{n+1}=2a_n+1\ (n=1,2,3,\cdots)$　$\cdots\cdots\cdots$②

②の両辺を4で割って、$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{4}$　$\cdots$②′

$\alpha=\dfrac{1}{2}\alpha+\dfrac{1}{4}$　$\cdots\cdots\cdots$③　として、

②’−③より、$a_{n+1}-\alpha=\dfrac{1}{2}(a_n-\alpha)$

$\boldsymbol{c_n=a_n-\alpha}$とおくと、$c_{n+1}=\dfrac{1}{2}c_n$　∴　$c_n=c_1\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

ここで、③より、$\alpha=\dfrac{1}{2}$　、従って、$c_1=a_1-\alpha=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore c_n=\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}$

よって、$a_n=\alpha+c_n=\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}$