階差数列を用いた別解について

＜例 30＞(1)

a_1＝1　　　…………①

a_{n+1}＝3a_n－1　　………②

①、②より、a_2、a_3、a_4、a_5を求める。

a_2＝　2　　、a_3＝5　　　、a_4＝14　　、a_5＝41

より、数列{a_n}は、次のようになる。

1、2、5、14、41、

1、3、9、27、

この数列の階差数列を{b_n}とおけば、b_n＝3^{n-1}

従って、n≧2 のとき、

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 3^{k-1} = 1 + \frac{3^{n-1} - 1}{3 - 1} = 1 + \frac{3^{n-1} - 1}{2} = \frac{3^{n-1} + 1}{2}$$

このとき、$a_1 = \frac{3^0 + 1}{2} = 1$ となり、$\mathrm{n} = 1$ のときも成立する。

従って、$a_n = \frac{3^{n-1} + 1}{2}$

（Ⅳ）　$\boldsymbol{a_1 = \mathrm{a}}$　, $\boldsymbol{a_{n+1} = a_n + (n}$**の式)**

与えられた漸化式より、$a_{n+1} - a_n =$ (nの式)となるので、

$\boldsymbol{a_{n+1} - a_n = b_n}$　とおけば、数列$\{b_n\}$は、数列$\{a_n\}$の　階差　**数列**である。従って、

$$n \geq 2 \text{ のとき、} a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

より、a_nを求めることができる。

<例31>　次の条件によって定められた数列の一般項を求めよ。

(1)　$a_1 = 1$　, $a_{n+1} = a_n + 2\mathrm{n} - 1$

$a_{n+1} - a_n = 2n - 1$より、

$$n \geq 2 \text{ のとき、} a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}(2k-1) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{n-1} 1$$

$$= 1 + 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} - (n-1)$$

$$= n^2 - 2n + 2$$

このとき、$a_1 = 1 - 2 + 2 = 1$ となり、$\mathrm{n} = 1$ のときも成立する。

従って、$a_n = n^2 - 2n + 2$

(2)　$a_1 = 1$　, $a_{n+1} = a_n + 3^n$

$a_{n+1} - a_n = 3^n$より、

$$n \geq 2 \text{ のとき、} a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 3^k = 1 + \frac{3(3^{n-1} - 1)}{3 - 1}$$

$$= 1 + \frac{3^n - 3}{2} = \frac{3^n - 1}{2}$$

このとき、$a_1 = \dfrac{3-1}{2} = 1$ となり、$\mathrm{n} = 1$ のときも成立する。

従って、$a_n = \dfrac{3^n - 1}{2}$