発展　3 項間の漸化式の解法

（Ⅴ）　$a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n$　ただし，p＋q＝1

＜例 32＞次式で定められる数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

$a_1=0$ ，$a_2=1$　…………　①

$$a_{n+2}=\frac{2}{3}a_{n+1}+\frac{1}{3}a_n \quad \cdots\cdots \quad ②$$

基本方針は，数列$\{a_n\}$の階差数列を$\{b_n\}$として、階差数列$\{b_n\}$がどの様な数列になるかを調べることである。それが分かれば

$n \geq 2$ のとき、$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k$

により，数列$\{a_n\}$の一般項を求めることが出来る。

（解答）②において，両辺から　a_{n+1}を引くと，

$$a_{n+2}-a_{n+1}=-\frac{1}{3}(a_{n+1}-a_n) \quad \cdots\cdot ③$$

ここで，数列$\{a_n\}$の階差数列を$\{b_n\}$とおく。

このとき③をb_nで表すと、

$$b_{n+1}=-\frac{1}{3}b_n$$

従って，階差数列 $\{b_n\}$ は，公比$-\frac{1}{3}$ の等比数列

また，その初項b_1は　$\boldsymbol{b_1=a_2-a_1}=1-0=1$

$n \geqq 2$　のとき　$a_n=a_1+\boxed{\sum_{k=1}^{n-1}b_k}$

これは、

初項 1、公比$-\frac{1}{3}$

の等比数列の和である。

$$=0+\boxed{\frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}}=\frac{3}{4}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$$

$n=1$　のとき　$a_1=\frac{3}{4}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{0}\right\}=0$ となり成立する。

＜例 33＞次式で定められる数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

$a_1=1$ ，$a_2=4$　………… ①

$a_{n+2}=4a_{n+1}-3a_n$……… ②

②において，両辺から　a_{n+1}を引くと，

$a_{n+2}-a_{n+1}=3(a_{n+1}-a_n)$　…・ ③

ここで，数列$\{a_n\}$の階差数列を$\{b_n\}$とおく。

このとき③をb_nで表すと、

$b_{n+1}=3b_n$

従って，階差数列 $\{b_n\}$ は，公比 3 の等比数列

また，その初項b_1は　$b_1=a_2-a_1=4-1=3$

これは、初項 3、公比 3 の等比数列の和である。

$n \geqq 2$　のとき　$a_n=a_1+\boxed{\sum_{k=1}^{n-1} b_k}$

$$=1+\boxed{\frac{3(3^{n-1}-1)}{3-1}}=1+\frac{3^n-3}{2}=\frac{3^n-1}{2}$$

$n=1$　のとき　$a_1=\frac{3-1}{2}=1$となり成立する。