10.数学的帰納法

A 数学的帰納法の原理

まず，次の例について考えてみよう。

$$a_1 = 1\,, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + 2a_n} \quad (n = 1,2,3,\cdots\cdots)$$

この漸化式から、

$$a_2 = \frac{a_1}{1 + 2a_1} = \frac{1}{1 + 2} = \frac{1}{3}$$

$$a_3 = \frac{a_2}{1 + 2a_2} = \frac{\frac{1}{3}}{1 + 2 \times \frac{1}{3}} = \frac{1}{5}$$

$$a_4 = \frac{a_3}{1 + 2a_3} = \frac{\frac{1}{5}}{1 + 2 \times \frac{1}{5}} = \frac{1}{7}$$

従って，これから $a_n = \dfrac{1}{2n - 1}$ と推定される。

この例の方法であれば，幾らでも検証は出来るが，どんなにたくさん調べてみても自然数は無数にあるので，このような方法では**全ての自然数についての真偽の判定は不可能**である。

そこで，全ての自然数について，正しいことを証明するには，どうすれば良いであろうか？

《数学的帰納法の原理》

ある自然数 n についての命題Pが，すべての自然数について成立することを示すためには，次の２つのことを示せばよい。

Ⅰ．n＝1　のとき　命題P　が正しいことを示す。
Ⅱ．n＝k　のとき　命題P　が正しいと仮定して　n＝k＋1 のときも P　が正しいことを示す。

Ⅰ，Ⅱを示せば，すべての自然数 n について　命題Pが正しいことになる。なぜか？

$\boxed{\text{B}}$ 等式の証明

＜例 34＞数学的帰納法により，次の等式を証明してみよう。

(1) $1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ……(A)

（Ⅰ） n＝1 のとき

左辺＝$1^2=1$

右辺＝$\dfrac{1\cdot 2\cdot 3}{6}=1$

従って，n＝1 のとき(A)は正しい。

（Ⅱ） n＝k のとき，(A)が正しいと仮定する。

このとき，(A)より

$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

が成り立つ。

次に，n＝k＋1 の場合について考えてみると

$$\begin{aligned}
\text{(A)の左辺}&=\boxed{1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+k^2}+(k+1)^2\\
&=\boxed{\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}}+(k+1)^2\\
&=\frac{(k+1)}{6}\{k(2k+1)+6(k+1)\}=\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}\\
&=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}
\end{aligned}$$

$$\text{(A)の右辺}=\frac{(k+1)(k+2)\{2(k+1)+1\}}{6}=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

従って，n＝k＋1 のときも(A)が成り立つことが分かる。

よって(Ⅰ)(Ⅱ)より，全ての自然数 n について(A)が成り立つことが証明された。