(2) $2+4+6+\cdots\cdots+2n=n(n+1)$ ……(A)

（Ⅰ） n＝1 のとき

左辺＝2

右辺＝1･2＝2

従って，n＝1 のとき，(A)は正しい。

（Ⅱ） n＝k のとき，(A)が正しいと仮定すると、次の式が成り立つ。

$$2+4+6+\cdots\cdots+2k=k(k+1)$$

n＝k＋1 のとき、

(A)の左辺$=\boxed{2+4+6+\cdots\cdots+2k}+2(k+1)$

$=\boxed{k(k+1)}+2(k+1)=(k+1)(k+2)$

(A)の右辺＝$(k+1)(k+2)$

従って，n＝k＋1 のときも(A)が成り立つ。

よって(Ⅰ)(Ⅱ)より，全ての自然数 n について(A)が成り立つ。

(3) $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots\cdots+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$ ……(A)

（Ⅰ） n＝1 のとき

左辺＝$1\cdot2=2$ 、右辺＝$\dfrac{1\cdot2\cdot3}{3}=2$

従って，n＝1 のとき(A)は正しい。

（Ⅱ） n＝k のとき，(A)が正しいと仮定する。このとき，(A)より

$$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots\cdots+k(k+1)=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}$$

n＝k＋1 のとき、

左辺$=\boxed{1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots\cdots+k(k+1)}+(k+1)(k+2)$

$=\boxed{\dfrac{k(k+1)(k+2)}{3}}+(k+1)(k+2)=\dfrac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$

右辺$=\dfrac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$

従って，n＝k＋1 のときも(A)が成り立つ。

よって(Ⅰ)(Ⅱ)より，全ての自然数 n について(A)が成り立つ。

(4) $1^2+3^2+5^2+\cdots\cdots+(2n-1)^2=\dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$ ……(A)

（Ⅰ） n＝1 のとき

$$\text{左辺}=(2-1)^2=1 \quad \text{、右辺}=\frac{1\cdot 1\cdot 3}{3}=1$$

従って，n＝1 のとき(A)は正しい。

（Ⅱ） n＝k のとき，(A)が正しいと仮定する。このとき，(A)より

$$1^2+3^3+5^3+\cdots\cdots+(2k-1)^2=\frac{k(2k-1)(2k+1)}{3}$$

n＝k＋1 のとき、

$$\text{左辺}=\boxed{1^2+3^3+5^3+\cdots\cdots+(2k-1)^2}+(2k+1)^2$$

$$=\boxed{\frac{k(2k-1)(2k+1)}{3}}+(2k+1)^2=\frac{(2k+1)}{3}\{k(2k-1)+3(2k+1)\}$$

$$=\frac{(2k+1)(2k^2+5k+3)}{3}=\frac{(2k+1)(k+1)(2k+3)}{3}$$

$$\text{右辺}=\frac{(k+1)(2k+1)(2k+3)}{3}$$

従って，n＝k＋1 のときも(A)が成り立つ。

よって(Ⅰ)(Ⅱ)より，全ての自然数 n について(A)が成り立つ。

＜例 35＞ nが自然数のとき、6^n-1は、5 の倍数であることを証明せよ。

P＝6^n-1とおく。

(Ⅰ)n＝1 のとき、P＝6－1＝5 より、P は 5 の倍数である。

(Ⅱ)n＝k のとき、P＝6^k-1が 5 の倍数と仮定すると、

P＝$6^k-1=5Q$ (ただし、Q は自然数)

とおける。

このとき、$6^k=5Q+1$

n＝k＋1 のとき、

P＝$6^{k+1}-1=6\cdot 6^k-1=6(5Q+1)-1=30Q+5=5(6Q+1)$

となり、P は 5 の倍数になる。

従って，n＝k＋1 のときも P は 5 の倍数となる。

よって(Ⅰ)(Ⅱ)より，全ての自然数 n について P＝6^n-1は 5 の倍数になる。