$\boxed{\text{C}}$ 不等式の証明

＜例 36＞数学的帰納法により，次の不等式を証明せよ。ただし、n は自然数とする。

(1)　$5^n > 4n$　・・・・・・(A)

（Ⅰ）　n＝1　のとき

左辺＝$5^1 = 5$

右辺＝4・1＝4

従って，左辺＞右辺となり、n＝1　のときは，（A）は正しい。

（Ⅱ）　n＝k のとき，（A）が正しいと仮定する。

このとき，（A）より

$5^k > 4k$

が成り立つ。

n＝k＋1　の場合は、

左辺＝$5^{k+1} = 5 \cdot 5^k$

仮定より$5^k > 4k$であるから

左辺＝$5^{k+1} = 5 \cdot 5^k > 5 \cdot 4k = 20k$

右辺＝$4(k+1) = 4k+4$

ここで、$20k - (4k+4) = 16k - 4 = 4(4k-1)$

k は自然数なので、4k－1＞0　∴　20k＞4k＋4

従って、左辺＞20k＞4k＋4＝右辺となり、

n＝k＋1 の場合も（A）は正しい。

よって、（Ⅰ）、（Ⅱ）より、すべての自然数で（A）は正しい。

不等式Ａ＞Ｂの証明方法 差をとり、 Ａ－Ｂ＞0 を示す。

(2) n ≧ 3のとき、$2^n > 2n+1$ ・・・・・・(A)

（Ⅰ） n＝3 のとき

左辺＝$2^3 = 8$

右辺＝2･3＋1＝7

従って，左辺＞右辺となり、n＝3 のときは，(A)は正しい。

（Ⅱ） n＝k のとき，（A）が正しいと仮定する。

このとき，(A)より

$2^k > 2k+1$

が成り立つ。

n＝k＋1 の場合は、

左辺＝$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k$

仮定より$2^k > 2k+1$であるから

左辺＝$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2(2k+1) = 4k+2$

右辺＝$2(k+1)+1 = 2k+3$

ここで、$(4k+2)-(2k+3) = 2k-1$

k は 3 以上の自然数なので、2k－1＞0 ∴ 4k＋2＞2k＋3

従って、左辺＞4k＋2＞2k＋3＝右辺となり、

n＝k＋1 の場合も(A)は正しい。

よって、(Ⅰ)、(Ⅱ)より、すべての自然数で(A)は正しい。

不等式A＞Bの証明方法 差をとり、 A－B＞0 を示す。