演習問題

$\boxed{1}$ 次の漸化式で定義される数列$\{a_n\}$がある。

$$a_1 = 2\,, \qquad a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n} \ \ (n = 1,2,3,\cdots\cdots)$$

(1) a_2、a_3、a_4を求めよ。

(2) 第 n 項a_nを推定し、それを数学的帰納法を用いて証明せよ。

(1)

$$a_2 = 2 - \frac{1}{a_1} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$a_3 = 2 - \frac{1}{a_2} = 2 - \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}$$

$$a_4 = 2 - \frac{1}{a_3} = 2 - \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{5}{4}$$

(2) (1)の結果より、次のように推定できる。

$$a_n = \frac{n+1}{n} \quad \cdots\cdots \quad \text{(A)}$$

(Ⅰ)　n＝1　のとき

$a_1 = \dfrac{1+1}{1} = 2$ となり、n = 1 のとき、(A)は正しい。

(Ⅱ)　n＝k のとき，（A）が正しいと仮定する。このとき，(A)より

$$a_k = \frac{k+1}{k}$$

n＝k+1　の場合は、

$$\text{左辺} = a_{k+1} = 2 - \frac{1}{a_k} = 2 - \frac{1}{\frac{k+1}{k}} = 2 - \frac{k}{k+1} = \frac{k+2}{k+1}$$

$$\text{右辺} = \frac{k+1+1}{k+1} = \frac{k+2}{k+1}$$

従って、n＝k＋1 の場合も(A)は正しい。

よって、(Ⅰ)、(Ⅱ)より、すべての自然数で(A)は正しい。

$\boxed{2}$　次の漸化式を解け。

$$a_1=6\ ,\ a_{n+1}=6a_n+3^{n+1}$$

（解答）

両辺を、3^{n+1}で割ると、

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\frac{6a_n+3^{n+1}}{3^{n+1}}=\frac{6a_n}{3^{n+1}}+\frac{3^{n+1}}{3^{n+1}}=\frac{2a_n}{3^n}+1$$

ここで、$x_n=\frac{a_n}{3^n}$ とおき、x_nとx_{n+1}で表すと、

$x_{n+1}=2x_n+1$

$\alpha=2\alpha+1$　とおくと、$\alpha=-1$

両辺を引くと

$x_{n+1}-\alpha=2(x_n-\alpha)$

となり、$x_n-\alpha=c_n$とおくと、$c_{n+1}=2c_n$

より、これは公比2の等比数列で、初項は

$c_1=x_1-\alpha=\frac{a_1}{3^1}+1=\frac{6}{3}+1=3$

より、$c_n=3\cdot 2^{n-1}$

$x_n=\alpha+c_n=-1+3\cdot 2^{n-1}$

ここで、$x_n=\frac{a_n}{3^n}$ より、$a_n=3^n\times x_n=3^n(-1+3\cdot 2^{n-1})$