C 等差数列の性質

3 つの数 a、b、c がこの順で等差数列をなすとき、

$$2b=a+c$$

（証明）公差を d とおくと、

b－a＝d

c－b＝d

これより、b－a＝c－b　∴　2b＝a＋c

※この b を、**等差中項**という。

〈例 7〉　次の数列が等差数列のとき、x の値を求めよ。

（1）2、x、10

2x＝2＋10　∴　x＝6

（2）$\frac{1}{12}$、$\frac{1}{x}$、$\frac{1}{6}$

$\frac{2}{x}=\frac{1}{12}+\frac{1}{6}$　$\therefore\frac{2}{x}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$　∴　x＝8

演習 2　数列a_1、a_2、a_3、･･･で各項が 0 と異なり，その逆数を項とする数列 $\frac{1}{a_1}$、$\frac{1}{a_2}$、$\frac{1}{a_3}$が等差数列のとき，もとの数列を調和数列という。

(1)　数列　4，2，x　が調和数列のとき，x の値を求めよ。

$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{x}$が等差数列をなすので、$2\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{x}$　より、$x=\frac{4}{3}$

(2)　調和数列　6，3，･････････････の一般項を求めよ。

$\frac{1}{6}$、$\frac{1}{3}$が等差数列をなすので、公差は、$\frac{1}{6}$　$a_n=\frac{1}{6}+(n-1)\times\frac{1}{6}=\frac{n}{6}$

3．等差数列の和

$\boxed{\mathrm{A}}$ 等差数列の和の公式

<例 8>　1 から 100 までの数の和を求めてみよ。

S＝1＋2＋3＋・・・・・・＋99＋100　とおく。

S＝100＋99＋98＋・・・・＋2＋1

両辺を加えて、2S＝101×100　∴　S＝5050

初項 a，公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ において初項から第 n 項までの和を求めよう。
第 n 項を ℓ とし，初項から第 n 項までの和を S_n とする。
このとき，

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_n$$
$$= a + (a+d) + (a+2d) + \cdots\cdots + \ell \quad ①$$

ここで，この数列の各項を逆向きに並べると
初項　ℓ　公差　$-d$　の等差数列となる。その和は

$$S_n = \ell + (\ell - d) + (\ell - 2d) + \cdots\cdots + a \quad ②$$

そこで　①＋②を作ると

$$2S_n = (a+\ell) + (a+\ell) + (a+\ell) + \cdots\cdots + (a+\ell)$$
$$= (a+\ell) \times n$$

従って，$S_n = \dfrac{n(a+\ell)}{2}$

ここで，$\ell = a_n = a + (n-1)d$　　より

$$a + \ell = 2a + (n-1)d$$

等差数列の和に関して、次の公式が成り立つ。

初項 a，公差 d の等差数列の初項から第 n 項までの和を S_n とするとき，

$$S_n = \frac{n(a+\ell)}{2}$$

$$S_n = \frac{n(a+a_n)}{2} = \frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$$