C 等比数列の性質

3 つの数 a、b、c がこの順で等比数列をなすとき、

$$b^2 = ac$$

（証明）公比を r とおくと、

$b = ar$　∴　$r = \dfrac{b}{a}$

$c = br$　∴　$r = \dfrac{c}{b}$

これより、$\dfrac{b}{a} = \dfrac{c}{b}$　従って、$b^2 = ac$

※この b を、**等比中項**という。

〈例 12〉 次の数列が等比数列のとき、x の値を求めよ。

(1) 9、x、4、･･･

$x^2 = 4 \times 9 = 36$　∴$x = \pm 6$

(2) 1、x、x＋2、･･･

$x^2 = 1 \times (x+2)$　∴　$x^2 - x - 2 = 0$　∴ $(x-2)(x+1) = 0$　よって、$x = 2, -1$

＜例 13＞ 8, a, b が等差数列をなし, a, b, 36 が等比数列をなすとき, a, b の値を求めよ。

8, a, b が等差数列をなすので、$2a = 8 + b$　･･･　①

a, b, 36 が等比数列をなすので、$b^2 = 36a$　･･･　②

①　より、$b = 2a - 8$、これを②に代入して、

$(2a-8)2 = 36a$　整理して、$a2 - 17a + 16 = 0$

$(a-1)(a-16) = 0$　より、$a = 1$、16

$a = 1$ のとき、$b = -6$

$a = 16$ のとき、$b = 24$

５．等比数列の和

$\boxed{\text{A}}$ 等比数列の和の公式

初項 a，公比 r の等比数列｛a_n｝の初項から第 n 項までの和S_nは次のようになる

r≠1　のとき，$S_n=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots\cdots+a_n$

$=a+ar+ar^2+\cdots\cdots\cdots+ar^{n-1}$　$\cdots\cdots\cdots$ ①

ここで，①×r を作ると，

$rS_n=ar+ar^2+ar^3+\cdots\cdots\cdots+ar^n$　$\cdots\cdots\cdots$ ②

②－①を計算して

$(r-1)S_n=ar^n-a=a(r^n-1)$

従って，r≠1　のとき，$S_n=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

（注 1）　r＝1　のときは，①より、$S_n=a+a+a+\cdots\cdots\cdots\cdots+a=na$

（注 2）　r ＜1 のときは、$S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$の方が計算が楽になる。

〈例 14〉 次の等比数列の和を求めよ。

(1)　初項 3，公比 2，項数 6

$$S_6=\frac{3(2^6-1)}{2-1}=3(64-1)=189$$

(2)　初項 1，公比$\dfrac{1}{2}$，項数 5

$$S_6=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^5}{1-\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{1-\frac{1}{32}}{\frac{1}{2}}=\frac{31}{16}$$

(3)　2，6，18，$\cdots\cdots\cdots$　の初項から第 n 項まで

$$S_n=\frac{2\{3^n-1\}}{3-1}=3^n-1$$

(4)　2、$\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{2}{9}$，$\dfrac{2}{27}$，$\cdots\cdots\cdots$　の初項から第 n 項まで

$$S_n=\frac{2\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{3}}=3\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$