演習６　等比数列について次の問に答えよ。

(1) 初項 3, 公比 2, 和が 93 である等比数列の項数 n

$S_n=\frac{3(2^n-1)}{2-1}=3(2^n-1)=93$

$2^n-1=31$　∴　$2^n=32=2^5$

従って、n＝5

(2) 初項 2, 公比－2, 末項－256 の等比数列の項数と和を求めよ。

この等比数列は、2、－4、8、・・・・・・　、－256

$a_n=2\cdot(-2)^{n-1}=-256$ として、$(-2)^{n-1}=-128=(-2)^7$

n－1＝7 より、n＝8

従って、

$S_8=\frac{2((-2)^8-1)}{-2-1}=\frac{2(256-1)}{-3}=-2\times85=-170$

(参) $S_8=\frac{2(1-(-2)^8)}{1-(-2)}=\frac{2(1-256)}{3}=2\times(-85)=-170$

(3) 初項から第 3 項までの和が 7、第 3 項から第 5 項までの和が 28 である等比数列の初項 a、公比r

初項から第 3 項までの和＝$a_1+a_2+a_3=a+ar+ar^2=7$　・・・・・・ ①

第 3 項から第 5 項までの和＝$a_3+a_4+a_5=ar^2+ar^3+ar^4=28$　・・・・・・②

①　より、$a(1+r+r^2)=7$

②　より、$ar^2(1+r+r^2)=28$

両辺を割って。$r^2=4$　$r=\pm2$

r＝2 のとき、a＝1

r＝－2 のとき、$a=\frac{7}{3}$

第２節　いろいろな数列

６．和の記号Σ

$\boxed{\text{A}}$ 自然数の２乗の和

自然数の 2 乗の和は次のようになる。

$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

（証明）

$(k+1)^3=k^3+3k^2+3k+1$　より、

$(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$

ここで、

$k=1$ を代入して、$2^3-1^3=3\cdot1^2+3\cdot1+1$

$k=2$ を代入して、$3^3-2^3=3\cdot2^2+3\cdot2+1$

$k=3$ を代入して、$4^3-3^3=3\cdot3^2+3\cdot3+1$

・・・

$k=n$を代入して、$(n+1)^3-n^3=3\cdot n^2+3\cdot n+1$

これらの両辺を加えると、

$(n+1)^3-1=3(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)+3(1+2+3+\cdots+n)+n$

ここで、$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=S$ とおくと、$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(1+n)}{2}$より、

$n^3+3n^2+3n=3S+3\times\frac{n(1+n)}{2}+n$

両辺を 2 倍して、

$2n^3+6n^2+6n=6S+3n^2+3n+2n$

$\therefore$　$6S=2n^3+3n^2+n=n(n+1)(2n+1)$

$\therefore$　$S=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

＜例 15＞次の和を求めよ。

(1)　$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2=\frac{6(6+1)(12+1)}{6}=91$

(2)　$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+20^2=\frac{20(20+1)(40+1)}{6}=70\times41=2870$