B 和の記号 Σ

数列$\{a_n\}$の初項から，第n項までの和をS_nとすると，

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_n$$

で表すことが出来る。ここで，この和S_nを簡単に、$\sum_{k=1}^{n} a_k$ とかく。すなわち、

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_n$$

〈例16〉 次の式を和の形でかけ。

(1) $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$

(2) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$

(3) $\sum_{k=1}^{5} (3k+1) = 4 + 7 + 10 + 13 + 16$

(4) $\sum_{k=2}^{6} (3k-2) = 4 + 7 + 10 + 13 + 16$

(5) $\sum_{k=1}^{4} 2 \cdot 3^{k-1} = 2 \cdot 3^0 + 2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3$

(6) $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \cdots + \frac{n-1}{n}$

(7) $\sum_{i=1}^{n} (2i-1)^2 = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2$

＜例 17＞次の数列の和を、Σを用いて表せ。

(1)　1＋2＋3＋4＋5＋6＋7

$$= \sum_{k=1}^{7} k$$

a_1＝1、a_2＝2、a_3＝3 ・・・より、
a_k＝k

(2)　1＋4＋7＋10＋・・・・・・・・・・・・・・・・（第 n 項まで）

$$= \sum_{k=1}^{n} (3k-2)$$

a_1＝1、a_2＝4、a_3＝7 ・・・より、
この数列は初項 1、公差 3
a_k＝1+(k－1)×3＝3k－2

項が全て定数cである数列$\{a_n\}$は、

c 、c 、c 、c 、・・・・・・・、c 、・・・

であるから、一般項は、a_n＝c となる。

従って、

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{1}^{n} c = c + c + c + \cdots + c = nc$$

また、

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + \mathrm{n} = \frac{n(1+n)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

より、以上をまとめると、Σに関して、次の基本公式が成り立つ。ただし、Ⅰ.でCは定数

Ⅰ. $\sum_{k=1}^{n} C = \mathrm{nC}$

Ⅱ. $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

Ⅲ. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

〈例18〉 次の和を求めよ。

(1) $\sum_{k=1}^{15} 3 = 3 \times 15 = 45$

(2) $\sum_{k=1}^{10} k = \frac{10 \times 11}{2} = 55$

(3) $\sum_{k=1}^{100} k = \frac{100 \times 101}{2} = 5050$

(4) $\sum_{k=1}^{15} k^2 = \frac{15 \times 16 \times 31}{6} = 1240$

(5) $\sum_{k=1}^{20} k^2 = \frac{20 \times 21 \times 41}{6} = 2870$