チェック問題２

【1】次の数列の一般項を求めよ。

(1)　1, 2, 5, 10, 17, ・・・・・・

この数列の階差数列を{b_n}とおくと、{b_n}　1、3、5、7、9、・・・・・

より、$b_n=1+(n-1)\cdot 2=2n-1$　従って、

$n \geqq 2$ のとき、$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1} b_k=1+\sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)=1+2\times\frac{n(n-1)}{2}-(n-1)$

$=n^2-2n+2$

$a_1=1-2+2=1$　より、n＝1 の場合も成立する。従って、$a_n=n^2-2n+2$

(2)　5, 6, 8, 12, 20, 36,・・・・・・

この数列の階差数列を{b_n}とおくと、{b_n}　1、2、4、8、16、・・・・・

より、$b_n=1\cdot 2^{n-1}$　従って、

$n \geqq 2$ のとき、$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1} b_k=1+\sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1}=5+\frac{2^{n-1}-1}{2-1}=4+2^{n-1}$

$a_1=4+1=5$より、n＝1 の場合も成立する。従って、$a_n=4+2^{n-1}$

【2】初項から第 n 項までの和S_nが$S_n=n^2+3n$、のとき、一般項a_nを求めよ。

$a_1=S_1=1^2+3=4$

$n \geqq 2$　のとき、$a_n=S_n-S_{n-1}=(n^2+3n)-\{(n-1)^2+3(n-1)\}$

$=n^2+3n-(n^2-2n+1+3n-3)=2n+2$

n＝1　のとき, $a_1=2+2=4$

これは, $a_n=2n+2$　において, n＝1 とおいたものに等しい。

従って、一般項a_nは、$a_n=2n+2$

【3】 $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$ を求めよ。

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$

【4】 奇数を次のような群に分けて, 第 n 群が n 個の奇数を含むようにする。

1 | 3, 5 | 7, 9, 11 | 13, 15, 17, 19 | 21, 23, ・・・

(1)　この数列の第k項a_kを求めよ。　$a_k=2k-1$

(2)　第10群の最初の数は何か。　$a_{46}=91$

(3)　第n群の最初の数をnで表せ。　n^2-n+1

(4)　第10群の数の総和を求めよ。　1000

【5】次の漸化式で定められた数列の第 2 項から第 5 項までを求めよ。

$a_1=2,\ a_{n+1}=3a_n-2$（n＝1、2, 3, 4, ・・・・・・・・・・・・・・）

$a_2=3a_1-2=3\times2-2=4$

$a_3=3a_2-2=3\times4-2=10$

$a_4=3a_3-2=3\times10-2=28$

$a_5=3a_4-2=3\times28-2=82$

【6】次の漸化式を解け。

(1)　$a_1=1,\ a_{n+1}-a_n=-2$　$a_n=1+(n-1)\times(-2)=-2n+3$

(2)　$a_1=2,\ a_{n+1}=2a_n$　　$a_n=2\cdot2^{n-1}=2^n$

(3)　$a_1=1$ 、 $a_{n+1}=3a_n-1$

②より、　$\alpha=3\alpha-1$　・・・・・・・・・③　とおくと、$\alpha=\frac{1}{2}$

$c_1=a_1-\alpha=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$　$\therefore c_n=\frac{1}{2}\cdot3^{n-1}$

よって、$a_n=\alpha+c_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot3^{n-1}$

(4)　$a_1=1$　, $a_{n+1}=a_n+3^n$

$n\geq2$ のとき、$a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}3^k=1+\frac{3(3^{n-1}-1)}{3-1}=1+\frac{3^n-3}{2}=\frac{3^n-1}{2}$

このとき、$a_1=\frac{3-1}{2}=1$ となり、$n=1$ のときも成立する。従って、$a_n=\frac{3^n-1}{2}$

(5)　$a_1=1$　, $a_2=4$　、$a_{n+2}=4a_{n+1}-3a_n$

両辺から　a_{n+1}を引くと, $a_{n+2}-a_{n+1}=3(a_{n+1}-a_n)$

ここで, 数列$\{a_n\}$の階差数列を$\{b_n\}$とおくと、$b_{n+1}=3b_n$

従って, 階差数列$\{b_n\}$は, 公比 3 の等比数列、また, 初項b_1は　$b_1=a_2-a_1=4-1=3$

$n\geqq2$　のとき　$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=1+\frac{3(3^{n-1}-1)}{3-1}=1+\frac{3^n-3}{2}=\frac{3^n-1}{2}$

$n=1$　のとき　$a_1=\frac{3-1}{2}=1$ となり成立する。

【7】数学的帰納法により, 次の不等式を証明せよ。

$$5^n>4n\quad\cdots\cdots(\mathrm{A})$$

授業プリント第 3 章数列(22)＜例 36＞(1)を参照のこと。