数列公式集 2

1. 初項 a，公差 d の等差数列

I. 漸化式は、$a_{n+1}=a_n+d$

II. 一般項 $a_n=a+(n-1)d$

III. 初項から第 n 項までの和 $S_n=\frac{n(\text{初項}+\text{末項})}{2}$

2. 初項 a，公比 r の等比数列

I. 漸化式は、$a_{n+1}=r\cdot a_n$

II. 一般項 $a_n=a\cdot r^{n-1}$

III. r ≠ 1 のとき、初項から第 n 項までの和 $S_n=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$

3. シグマ公式

I. $\sum_{k=1}^{n} C = C+C+C+\cdots\cdots+C=nC$

II. $\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\cdots\cdots+\mathrm{n}=\frac{n(n+1)}{2}$

III. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

IV. $\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

V. $\sum_{k=1}^{n} r^k = \frac{r(r^n-1)}{r-1}$ 　ただし、$r\neq 1$

4. 階差数列

数列 $\{a_\mathrm{n}\}$ の階差数列を $\{b_\mathrm{n}\}$ とおくと、$b_\mathrm{n}=a_{n+1}-a_n$

$n\geq 2$ のとき、$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1} b_k$

$n=1$ のとき、a_1を求め、正しいことを確かめる

5. 和$\mathrm{S_n}$から一般項a_{n}を求める。

I. $a_1 = \mathrm{S}_1$

II. $\mathrm{n} \geqq 2$ のとき、$a_{\mathrm{n}} = \mathrm{S_n} - \mathrm{S_{n-1}}$

III.

6. 漸化式

I. a_1＝a　, a_{n+1}＝pa_n＋q　（ただし、p、q は定数）

$\alpha = p\alpha + q$　とすると、$a_n = \alpha + (a_1 - \alpha)p^{n-1}$

II. a_1＝a　, a_{n+1}＝a_n＋(nの式)　$a_{n+1} - a_n = (\mathrm{n}\ の式) = b_n$ より、公式4を使う

$\mathrm{n} \geqq 2$ のとき、$a_{\mathrm{n}} = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$

7. 次の等式を数学的帰納法で証明せよ。

$$1 + 2 + 3 + \cdots\cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad ・・・(A)$$

（Ⅰ）n＝1 のとき、

左辺＝1

右辺＝$\frac{1 \cdot 2}{2} = 1$

より、(A)は正しい

（Ⅱ）n＝k のとき、(A)が正しいと、<u>仮定</u>する。このとき、

$$1 + 2 + 3 + \cdots\cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

が成立する。

n＝k＋1 とき、

左辺 $= \boxed{1 + 2 + 3 + \cdots\cdots + k} + (k+1) = \boxed{\frac{k(k+1)}{2}} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

右辺 $= \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

従って、<u>n＝k＋1</u> のときも、(A)は正しい。

よって、（Ⅰ）、（Ⅱ）より、全ての自然数で（A）は正しい。