数列チェック問題 1 解答例

【1】第 5 項が 8, 第 10 項が－7 である等差数列がある。

(1)初項と公差を求めよ。

(2)－22 は、この数列の第何項か

(3)初項から第何項までの和が最大になるか。またそのときの和を求めよ。

(1) 初項 a、公差 d とおくと、

a_5＝a＋4d＝8 ・・・・・・①

a_{10}＝a＋9d＝－7 ・・・・・・②

①－②より、－5d＝15 ∴d＝－3 、従って、a＝20

(2) a_n＝20＋(n－1)×(－3)＝－3n＋23＝－22 として、n＝15 より、－22 は第 15 項

(3) 和は正の項だけを足したときに最大になる。

$a_n = -3n + 23 > 0$ を満たす最小の自然数は、n=7 であるから、第 7 項までの和が最大になる。

ここで、$a_7 = -21 + 23 = 2$ より、和は、

$$S_7 = \frac{7(20+2)}{2} = 77$$

【2】次のような等差数列の和を求めよ。

(1) 初項 2、末項 10、項数 10

$$S_{10} = \frac{10(2+10)}{2} = 60$$

(2) 2＋6＋10＋・・・・＋74

この数列は、初項 2、公差 4 の等差数列なので、a_n＝2＋(n－1)×4＝4n－2＝74 として、

n＝19 従って、末項 74 は第 19 項である。

$$\therefore\ S_{19} = \frac{19(2+74)}{2} = 722$$

【3】3 数 a，－1，b はこの順に等差数列をなし，－1，a，b はこの順に等比数列をなす。

a，b の値を求めよ。

a，－1，b はこの順に等差数列なので、－2＝a＋b ・・・・・・・①

－1，a，b はこの順に等比数列なので、$a^2 = -b$ ・・・・・・・②

①より、b＝－a－2、これを②に代入して、

$a^2 = a + 2$ ∴ $a^2 - a - 2 = 0$ $(a-2)(a+1) = 0$ よって、a＝2、－1

従って、

a＝2 のとき、b＝－4

a＝－1 のとき、b＝－1

【4】第 3 項が 20, 第 6 項が 160 である等比数列がある。

(1) 初項と公比を求めよ。

(2) 640 は第何項か求めよ。

(3) 初項から第 10 項までの和を求めよ。

(1) 初項 a、公比 r とおくと、

$a_3 = a \cdot r^2 = 20$ ・・・・・・①

$a_6 = a \cdot r^5 = 160$ ・・・・・・②

②÷①より、$r^3 = 8 = 2^3$ より、r=2 これを①に代入して、a=5

(2) $a_n = 5 \cdot 2^{n-1} = 640$ より、$2^{n-1} = 128 = 2^7$ ∴n=8。よって 640 は第 8 項

(3) $S_{10} = \dfrac{5(2^{10}-1)}{2-1} = 5115$

【4】次の計算をせよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-3) = 2\sum_{k=1}^{n}k - \sum_{k=1}^{n}3 = 2\times\frac{n(n+1)}{2} - 3n = n^2+n-3n = n^2-2n$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(4k+1) = 4\sum_{k=1}^{n-1}k + \sum_{k=1}^{n-1}1 = 4\times\frac{(n-1)n}{2} + (n-1) = 2n^2-n-1$

(3) $1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+12^2 = \dfrac{12\cdot 13\cdot 25}{6} = 650$

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(3k^2+k-2) = 3\sum_{k=1}^{n}k^2 + \sum_{k=1}^{n}k - \sum_{k=1}^{n}2 = 3\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} - 2n$

$\displaystyle = \frac{2n^3+3n^2+n}{2} + \frac{n^2+n}{2} - \frac{4n}{2} = \frac{2n^3+4n^2-2n}{2} = n^3+2n^2-n$

(5) $\displaystyle 1\cdot 4+2\cdot 7+3\cdot 10+\cdots\cdots+(\text{第n項}) = \sum_{k=1}^{n}k(3k+1) = \sum_{k=1}^{n}(3k^2+k)$

$\displaystyle = 3\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}\{(2n+1)+1\} = n(n+1)^2$

(注) 4 , 7 , 10 , ・・・は、公差3の等差数列より、第k項は$4+(k-1)\times 3 = 3k+1$

(6) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}4\cdot 3^{k-1} = \frac{4(3^n-1)}{3-1} = 2(3^n-1)$

(7) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}2^{k+1} = \frac{4(2^{n-1}-1)}{2-1} = 4(2^{n-1}-1) = 2^{n+1}-4$

(注) $4\cdot 2^{n-1} = 2^2\cdot 2^{n-1} = 2^{n+1}$